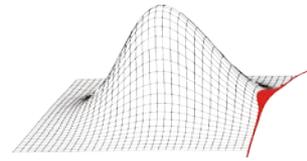


Seminar

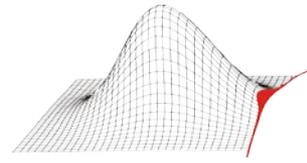
Probabilistische Methoden in der Anwendung

**Matthias Voigt
André Beschorner
Ilko Reuter**





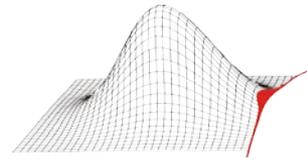
- **Einleitung**
- Theoretische Grundlagen der Statistik
- Regression
- Probabilistische Systemanalyse mit MCS



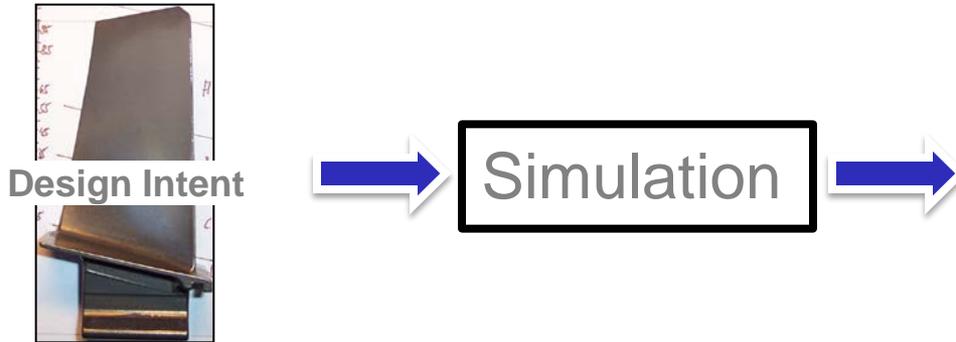
Zwei Turbinenschaufeln aus der gleichen Maschine



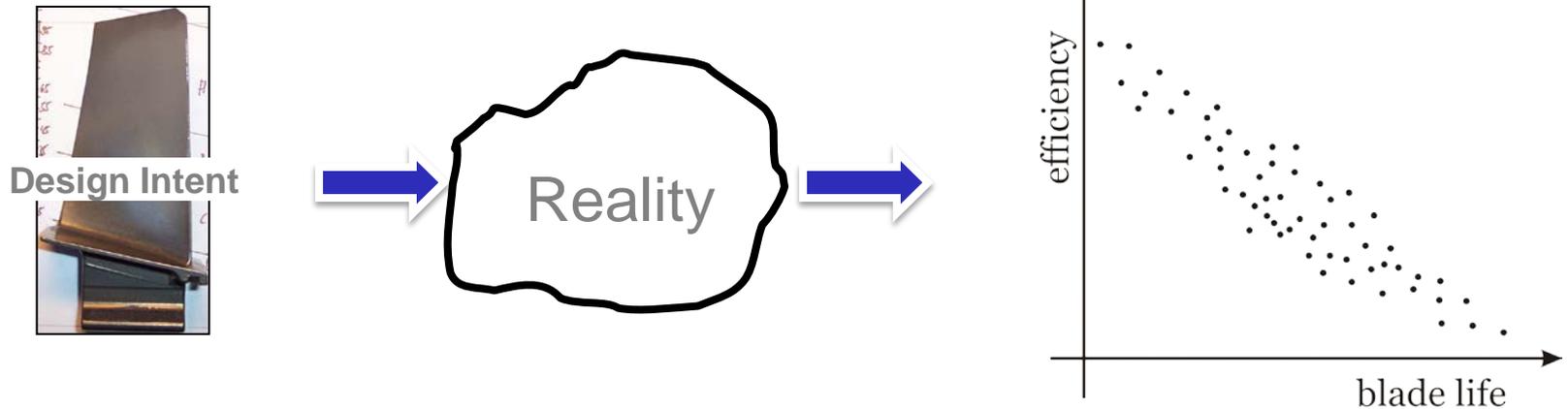
Quelle: Massachusetts Institute of Technology, Prof. David L. Darmofal

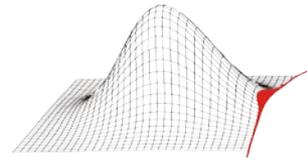


- Klassische deterministische Auslegung**



- Wirkliches Verhalten**





Stochastik

Lehre der Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit



Kombinatorik

Wie viele Möglichkeiten gibt es, Elemente anzuordnen oder aus einer Menge von Elementen zu ziehen?



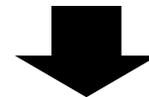
Statistik

Ableiten von Gesetzmäßigkeiten und Strukturen aus Ereignissen

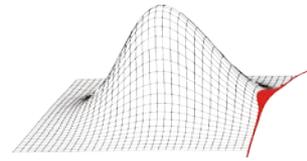


Probabilistik

Definition von Modellen zur Beschreibung von zufälligen Ereignissen

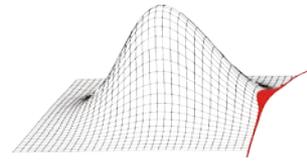


Vorhersagen dieser Ereignisse

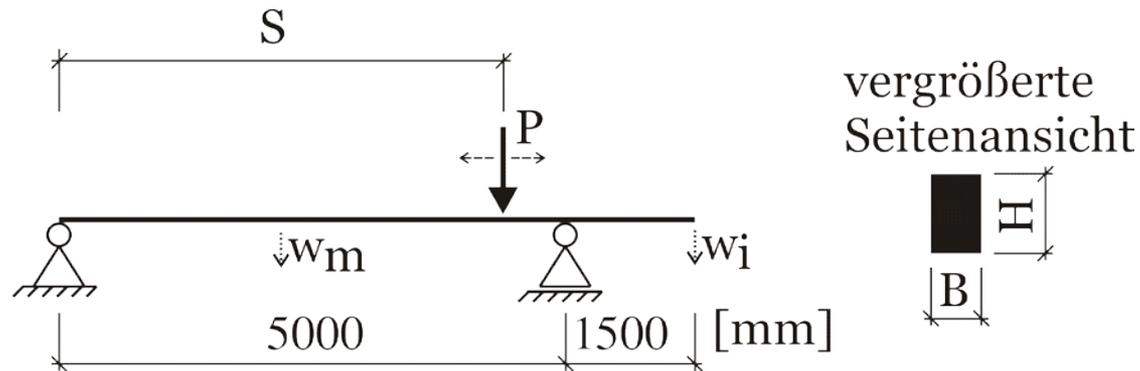


Probabilistische Simulationen von Systemen

Deterministische
Modelle



Träger auf zwei Stützen mit Kragarm

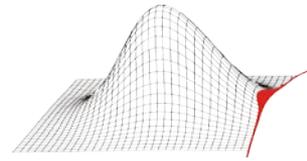


Eingangsgrößen:

- Höhe des Trägers
- Breite des Trägers
- E-Modul
- Punktlast
- Position der Punktlast

Ergebnisgrößen:

Durchbiegungen w_m , w_i



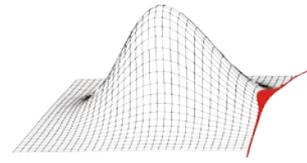
Probabilistische Simulationen von Systemen



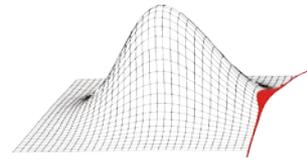
Deterministische
Modelle

Verteilungsart,
Verteilungsparameter,
Korrelationen der
Eingangsgrößen

Probabilistische
Methoden



- Einleitung
- Theoretische Grundlagen der Statistik
- Regression
- Probabilistische Systemanalyse mit MCS



Zufallsexperiment



diskret Zufallsvariable stetig

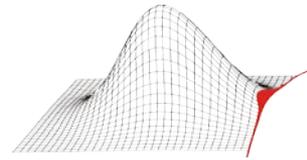
Wahrscheinlichkeitsfunktion

Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

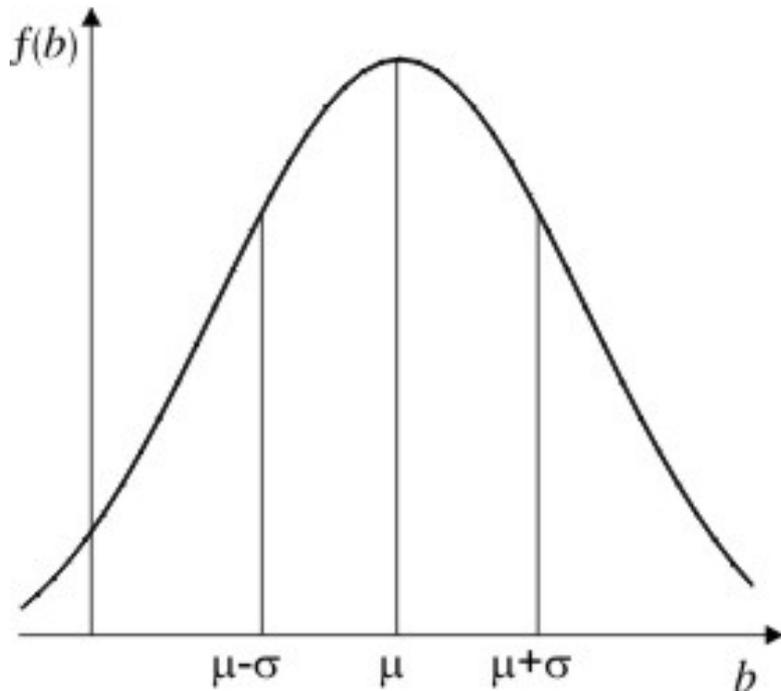
$$F(b) = \sum_{b_{ri} \leq b} f(b_{ri})$$

$$F(b) = \int_{-\infty}^b f(\tilde{b}) d\tilde{b}$$

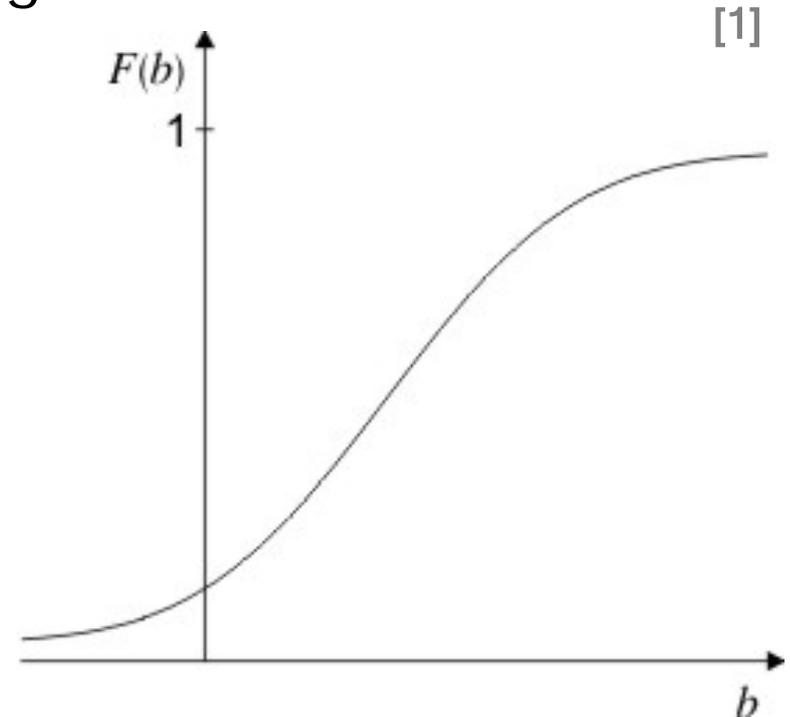
$$F(b) = P(\mathbf{b} \leq b)$$



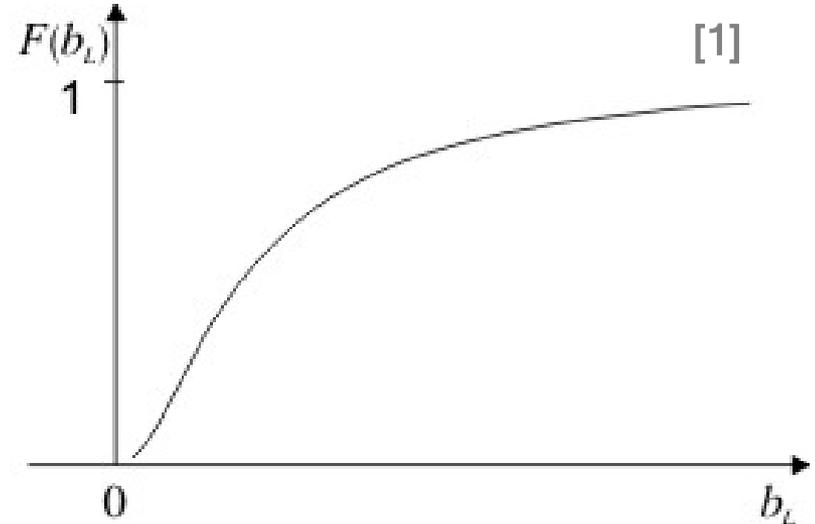
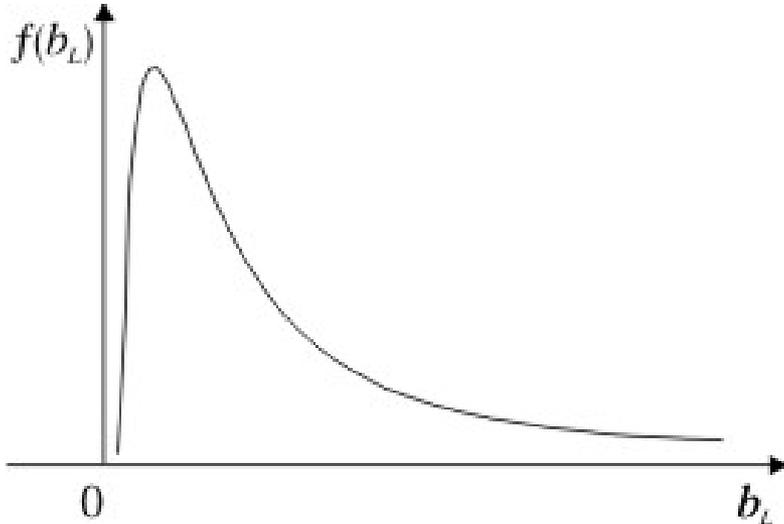
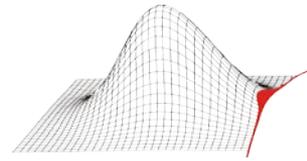
- auch Normalverteilung genannt



$$f(b) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(b-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

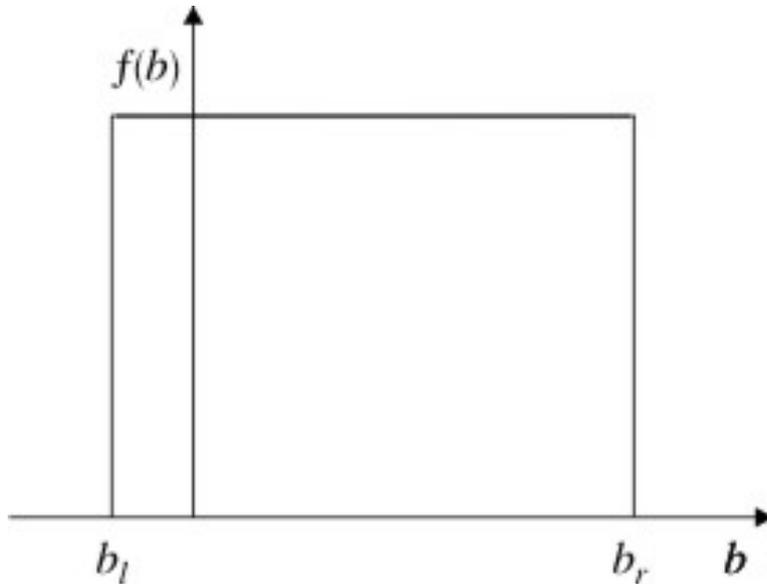
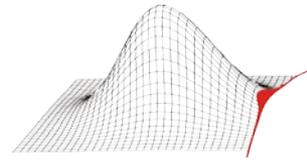


$$F(b) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^b \exp\left\{-\frac{(\tilde{b}-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} d\tilde{b}$$

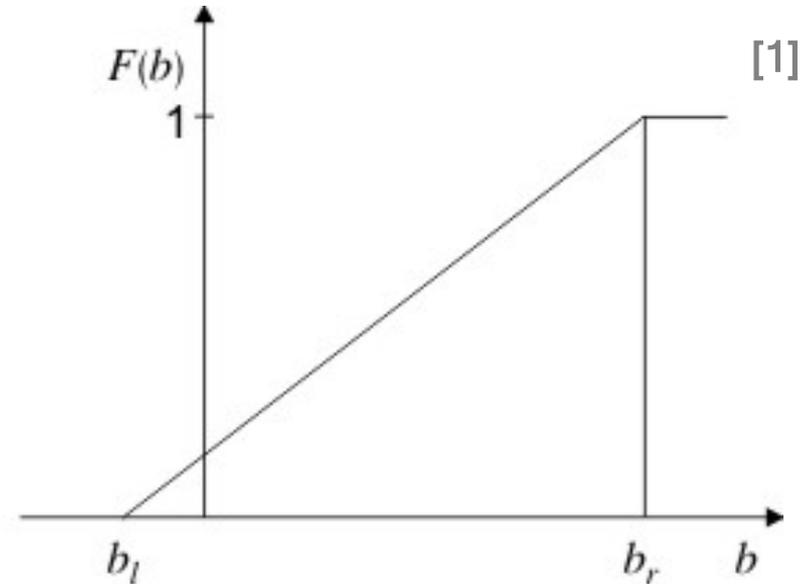


$$f(b_L) = \begin{cases} \frac{1}{\zeta \sqrt{2\pi} b_L} \exp \left\{ -\frac{(\ln b_L - \lambda)^2}{2\zeta^2} \right\} & \text{für } b_L > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

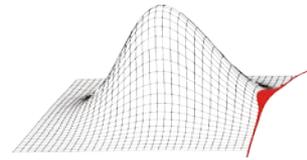
$$F(b_L) = \begin{cases} \frac{1}{\zeta \sqrt{2\pi}} \int_0^{b_L} \frac{1}{\tilde{b}_L} \exp \left\{ -\frac{(\ln \tilde{b}_L - \lambda)^2}{2\zeta^2} \right\} d\tilde{b}_L & \text{für } \tilde{b}_L > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad [1]$$



$$f(b) = \begin{cases} \frac{1}{b_r - b_l} & b_l \leq b \leq b_r \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

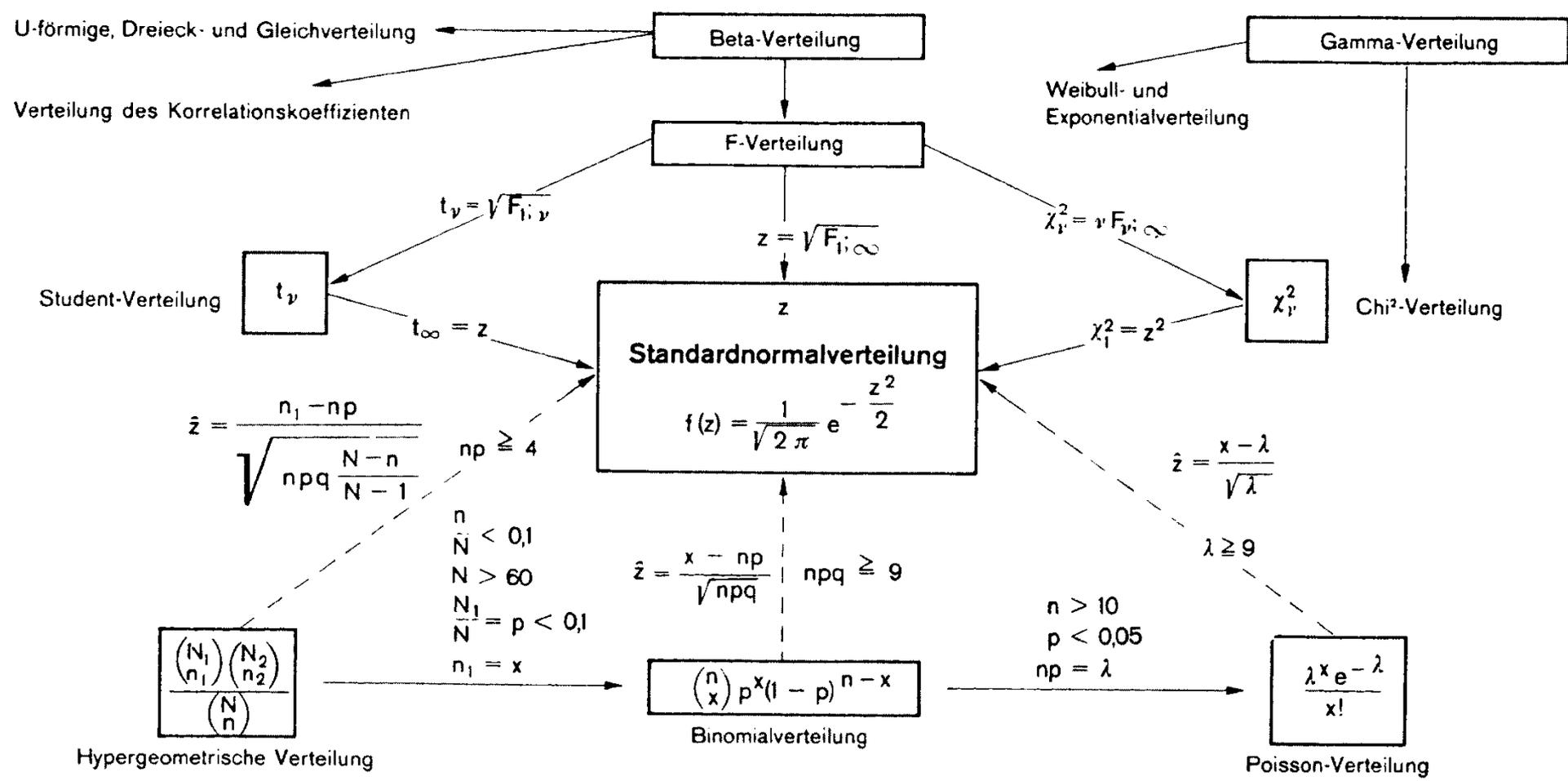


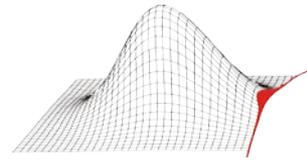
$$F(b) = \begin{cases} 0 & b < b_l \\ \frac{b - b_l}{b_r - b_l} & b_l \leq b \leq b_r \\ 1 & b > b_r \end{cases}$$



Übersicht 54. Zusammenhänge zwischen einigen Verteilungen

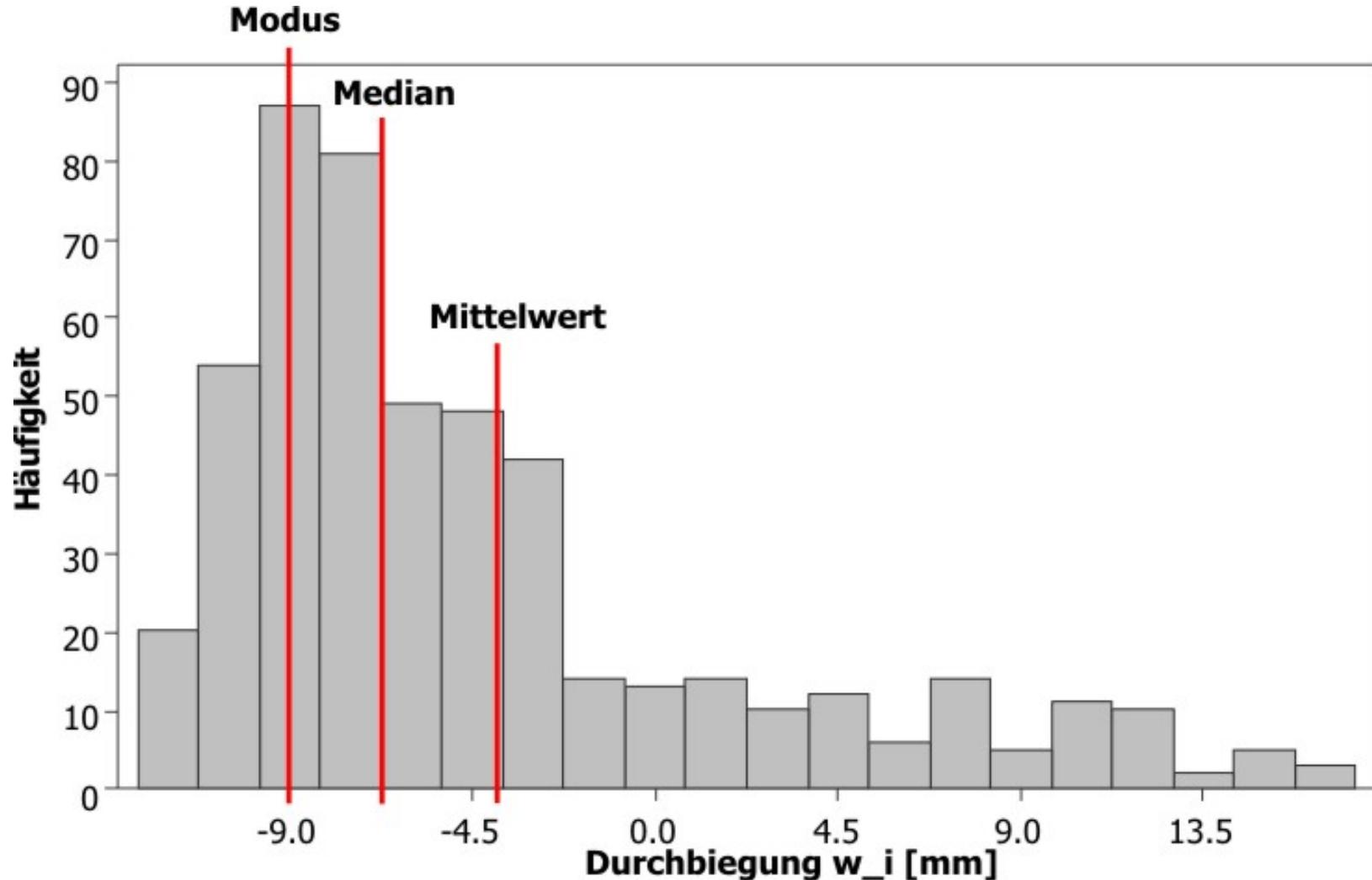
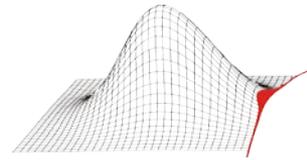
[1]

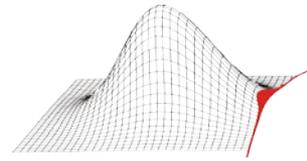




[1]

- Arithmetischer Mittelwert:
$$\bar{b}_{ri} = \frac{1}{n_{sim}} \sum_{k=1}^{n_{sim}} b_{ri,k}$$
 - Flächenschwerpunkt der Fläche unter der Dichtefunktion
 - Stark abhängig von Ausreißern
- Median oder Zentralwert: *Stichprobenwert, der genau in der Mitte einer geordneten Stichprobe steht.*
 - Robustes Lagemaß
- Modulwert oder Modus: *Ausprägung mit der größten Häufigkeit*
 - Nur eindeutig, wenn die Häufigkeitsverteilung ein eindeutiges Maximum aufweist





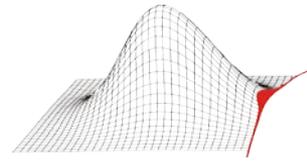
Standardabweichung:

[1]

$$\sigma(\mathbf{b}_{ri}) = \sqrt{Var(\mathbf{b}_{ri})} = \sqrt{\frac{1}{n_{sim} - 1} \sum_{k=1}^{n_{sim}} (b_{ri,k} - \bar{b}_{ri})^2}$$

Variationskoeffizient:

$$\delta(\mathbf{b}_{ri}) = \frac{\sigma(\mathbf{b}_{ri})}{\bar{b}_{ri}}$$

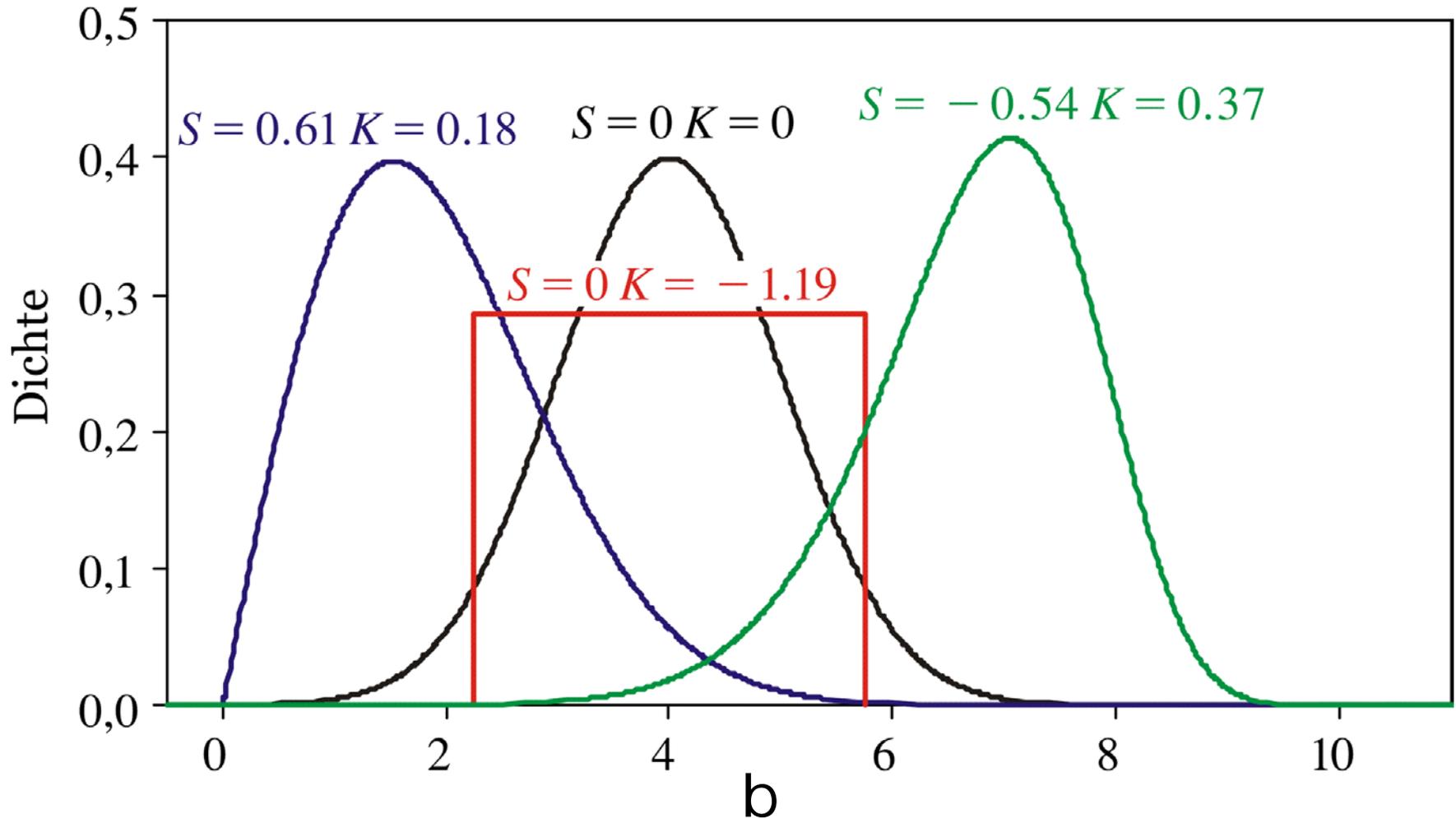
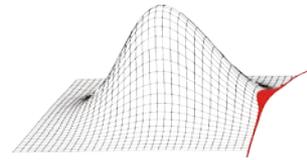


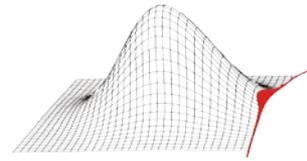
Schiefe: *Grad der Asymmetrie einer Verteilung um den [1] Median*

$$S = \frac{\sum_{i=1}^{n_{sim}} (b_{ri} - \bar{b}_{ri})^3}{n_{sim} * \sigma^3}$$

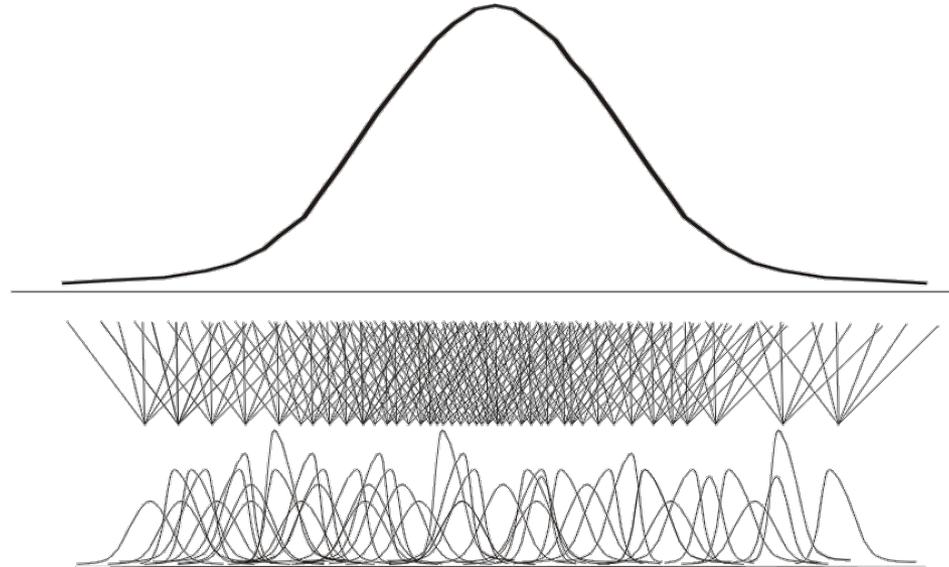
Wölbung: *Grad der Flachheit/Steilheit einer Verteilung*

$$K = \frac{\sum_{i=1}^{n_{sim}} (b_{ri} - \bar{b}_{ri})^4}{n_{sim} * \sigma^4} - 3$$

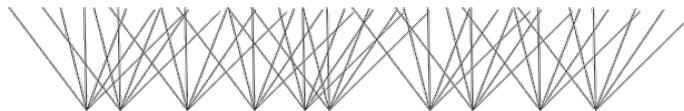




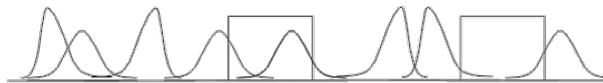
Alter



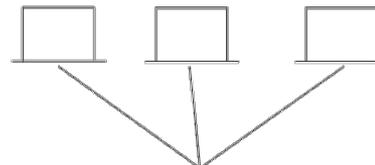
Beschichtung

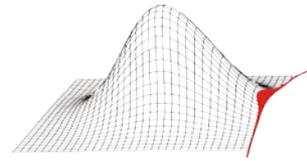


Ausformwerkzeug,
Konfiguration, Charge

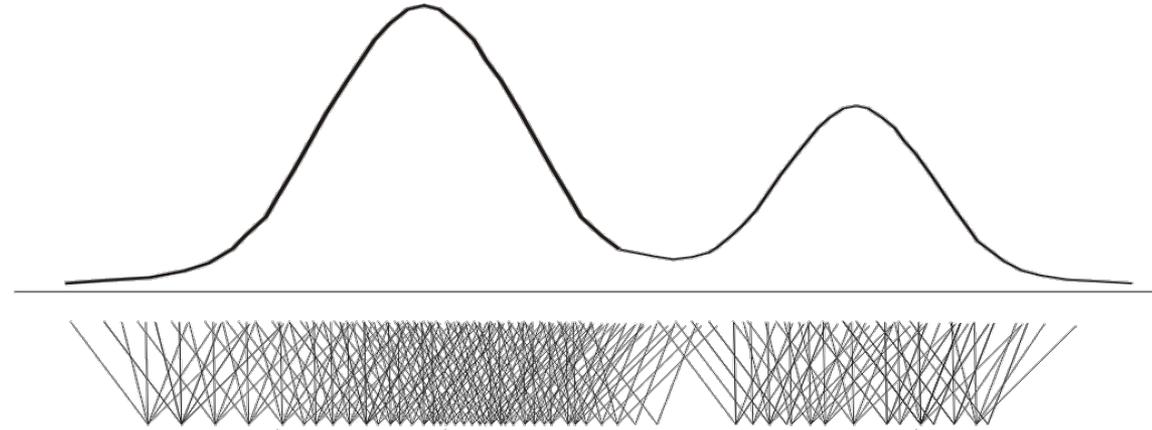


Hersteller

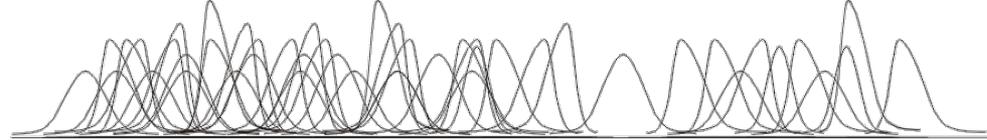




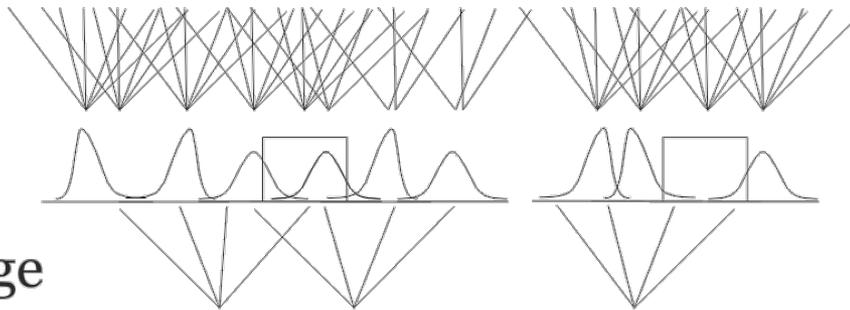
Alter



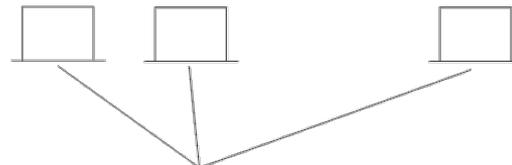
Beschichtung

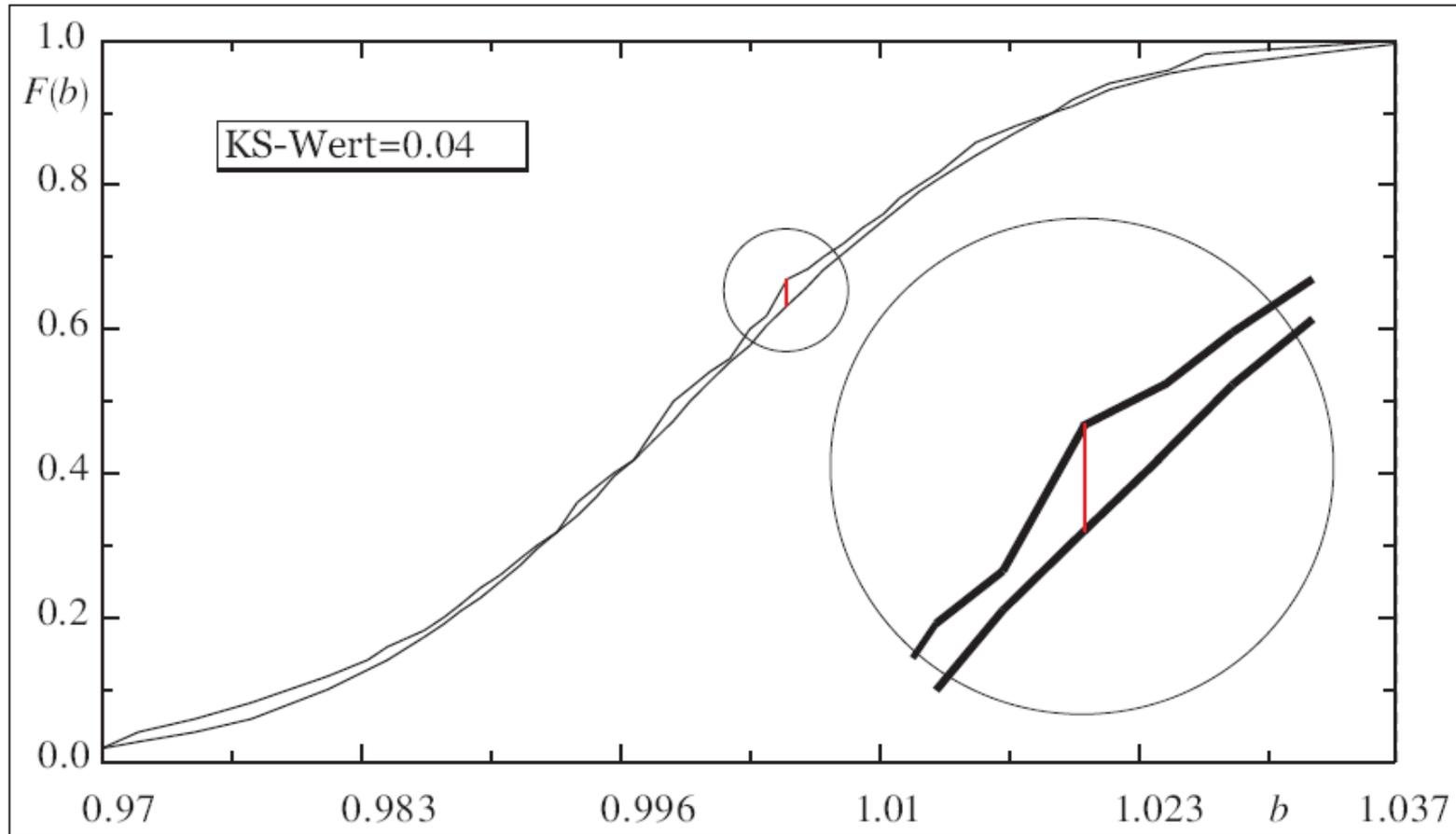
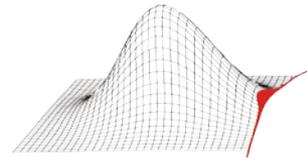


Ausformwerkzeug,
Konfiguration, Charge

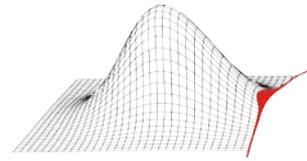


Hersteller





$$KS = \max_{-\infty < b_k < \infty} |F_d(b_k) - F_s(b_k)|$$

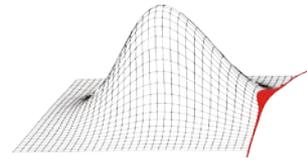


Der Anderson-Darling-Test ist eine Modifikation des [10]
Kolmogorow-Smirnow-Anpassungstests.

Die Abweichungen der Testverteilung von der Zielverteilung werden in den Randbereichen der Verteilungen höher und im Mittelbereich der Verteilung niedriger gewichtet.

$$A^2 = -n_{sim} - \frac{1}{n_{sim}} \sum_k^{n_{sim}} (2k - 1) (\ln F_s(b_k) + \ln(1 - F_s(b_{n_{sim}+1-k})))$$

Kritische Werte für A sind abhängig von der verwendeten Verteilungsfunktion F_s . Tabellierte Werte für A für verschiedene Verteilungsfunktionen sind z.B. in [11] veröffentlicht.



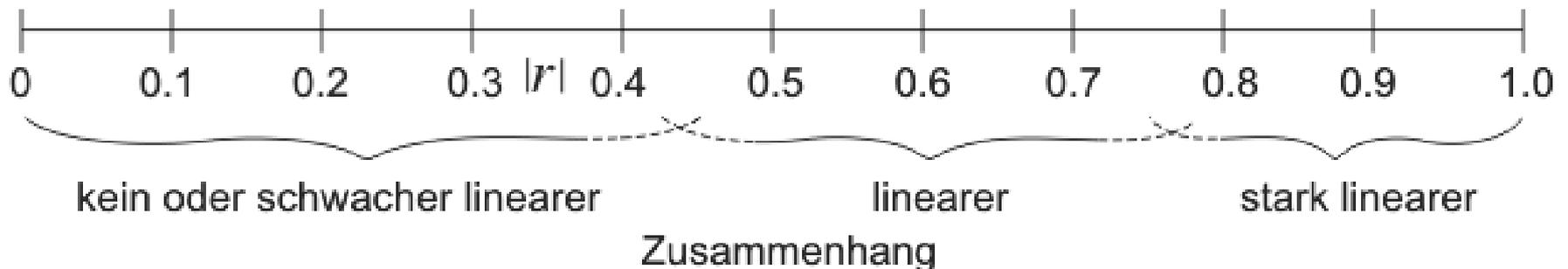
Korrelationskoeffizient nach Pearson

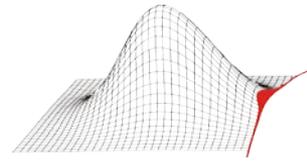
[1]

$$r_{\mathbf{b}_{ri}\mathbf{b}_{rj}} = \frac{Cov(\mathbf{b}_{ri}, \mathbf{b}_{rj})}{\sqrt{Var(\mathbf{b}_{ri})} \sqrt{Var(\mathbf{b}_{rj})}}$$

$$Cov(\mathbf{b}_{ri}, \mathbf{b}_{rj}) = \frac{1}{n_{sim} - 1} \sum_{k=1}^{n_{sim}} (b_{ri,k} - \bar{b}_{ri})(b_{rj,k} - \bar{b}_{rj})$$

Wertebereich: $[-1, 1]$





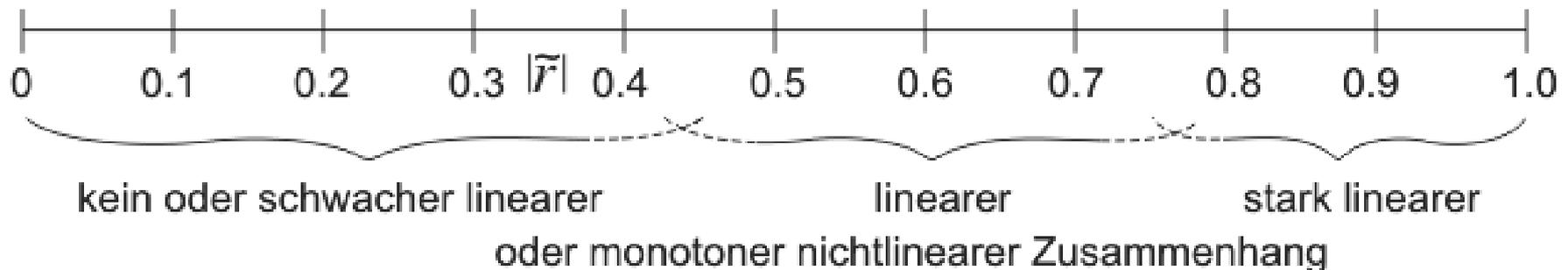
Rangkorrelationskoeffizient nach Spearman

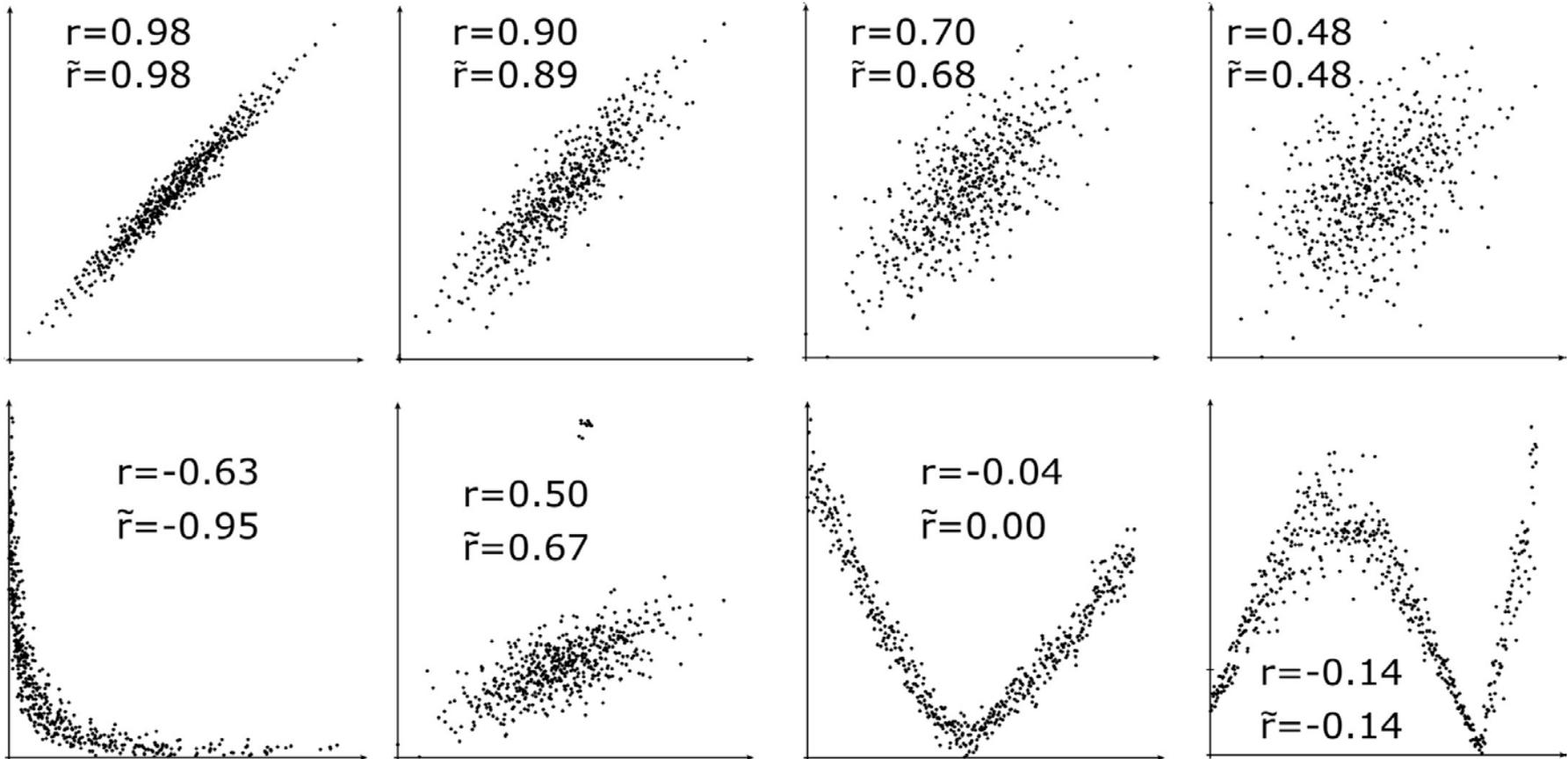
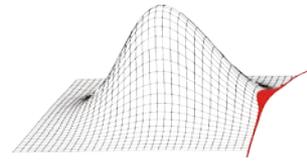
[1]

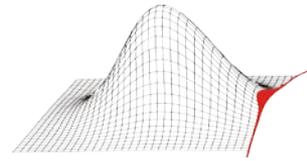
$$\mathbf{b}_{ri} = \begin{bmatrix} b_{ri,1} \\ \vdots \\ b_{ri,n_{sim}} \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Rang}(\mathbf{b}_{ri}) = \begin{bmatrix} R_{b_{ri,1}} = \text{Rang von } b_{ri,1} \text{ in } \mathbf{b}_{ri} \\ \vdots \\ R_{b_{ri,n_{sim}}} = \text{Rang von } b_{ri,n_{sim}} \text{ in } \mathbf{b}_{ri} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{r}_{\mathbf{b}_{ri}\mathbf{b}_{rj}} = \frac{\sum_{k=1}^{n_{sim}} (R_{b_{ri,k}} - \bar{R}_{b_{ri}})(R_{b_{rj,k}} - \bar{R}_{b_{rj}})}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n_{sim}} (R_{b_{ri,k}} - \bar{R}_{b_{ri}})^2} \sqrt{\sum_{k=1}^{n_{sim}} (R_{b_{rj,k}} - \bar{R}_{b_{rj}})^2}}$$

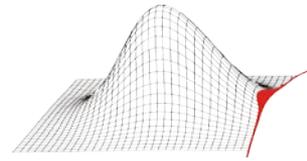
Wertebereich: [-1, 1]



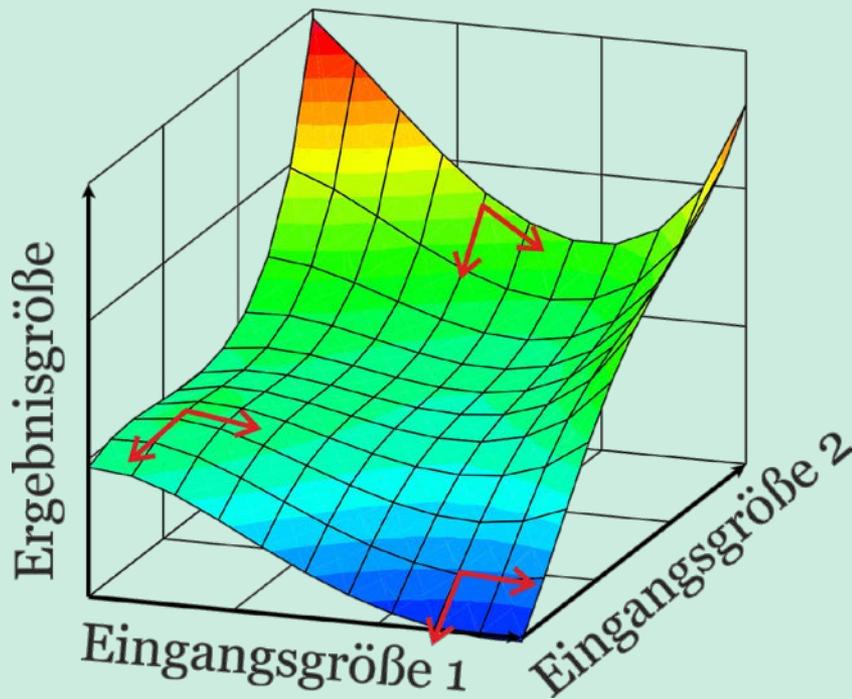




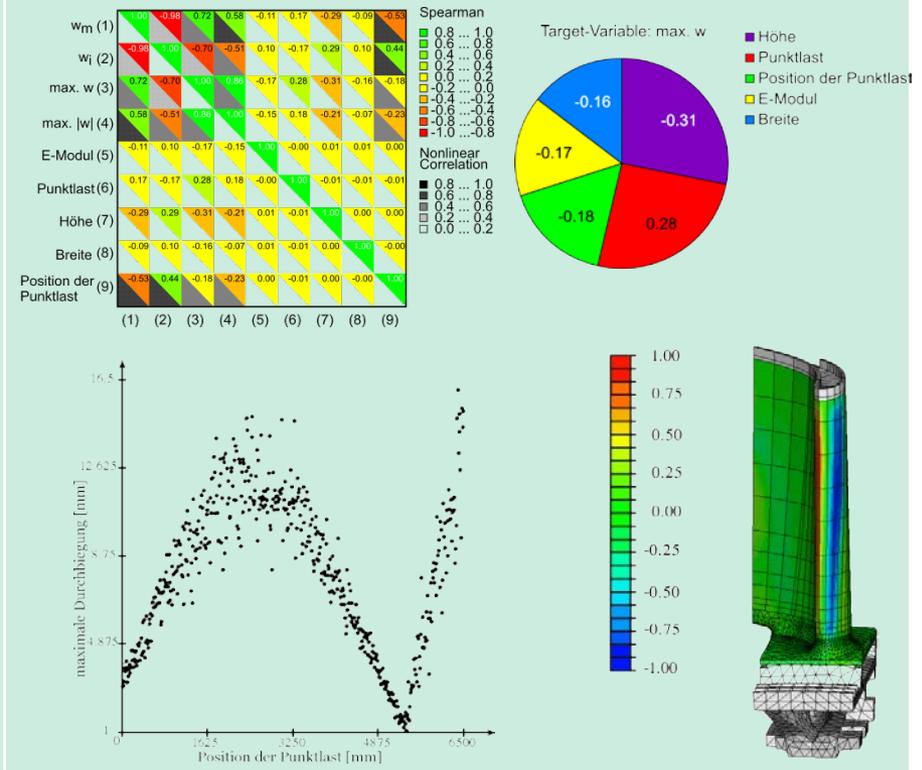
deterministisch	probabilistisch
Ableitungsbasierte Analyse	Varianzbasierte Analyse
Sensitivität aufgrund des partiellen Einflusses der Eingangsgröße am jeweils untersuchten Ort	Sensitivität aufgrund der Variation der Eingangsgröße und ihren mittleren Einfluss im Streubereich
$\frac{\partial f(\mathbf{b})}{\partial \mathbf{b}_{ri,k}}$	$r_{\mathbf{b}_{ri}\mathbf{b}_{rj}} = \frac{Cov(\mathbf{b}_{ri}, \mathbf{b}_{rj})}{\sqrt{Var(\mathbf{b}_{ri})}\sqrt{Var(\mathbf{b}_{rj})}}$

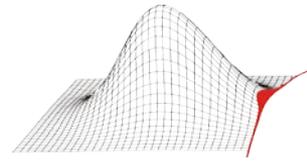


deterministisch

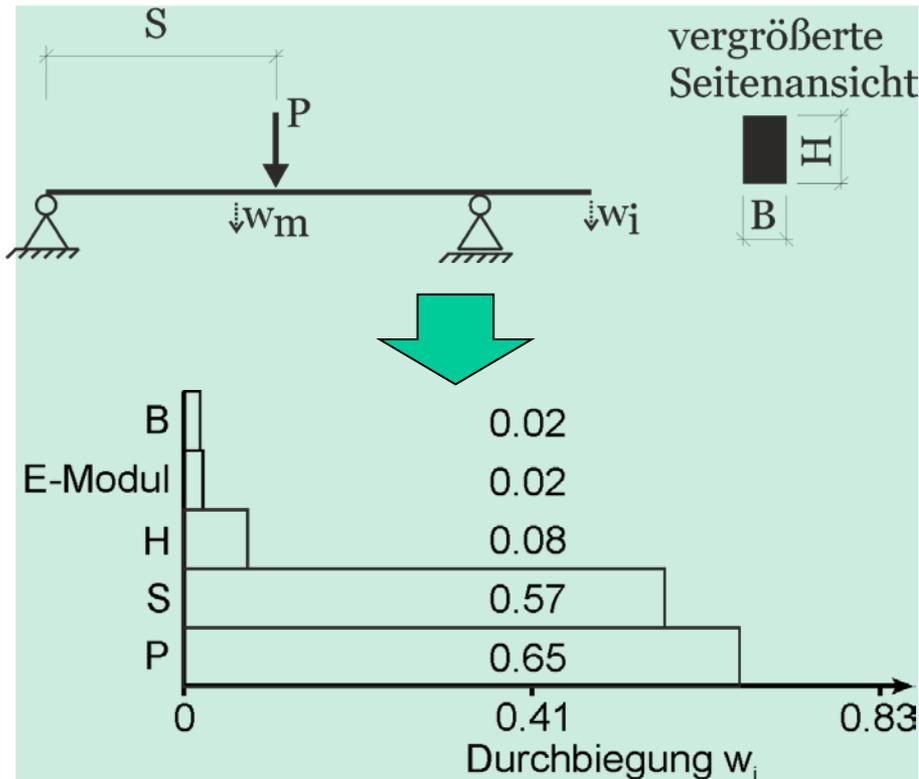


probabilistisch

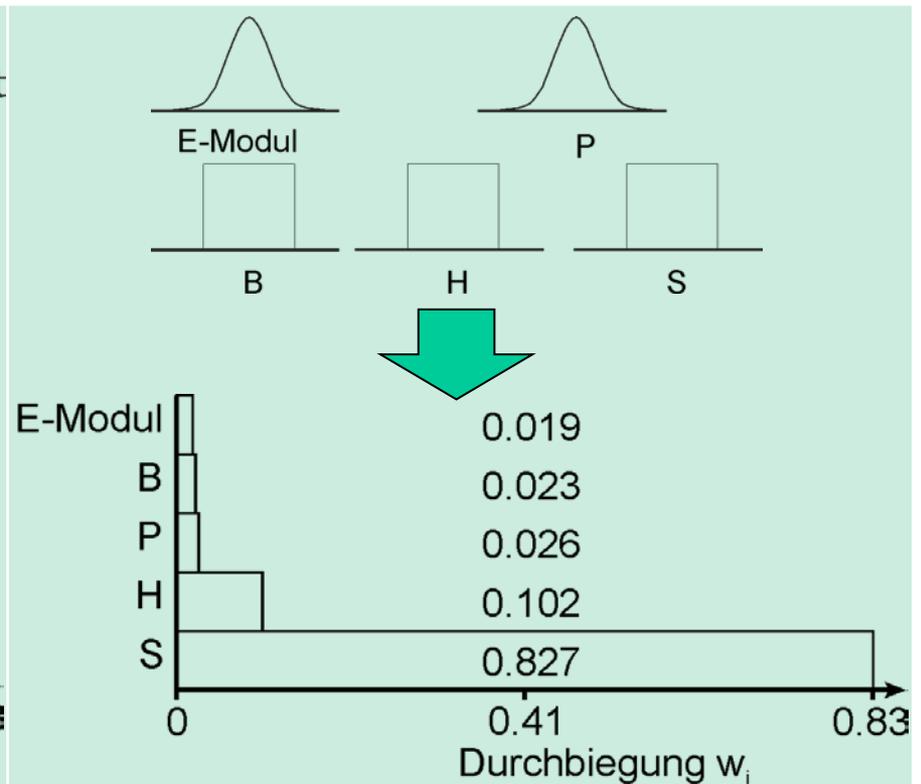


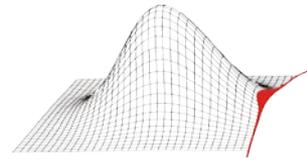


deterministisches Ranking

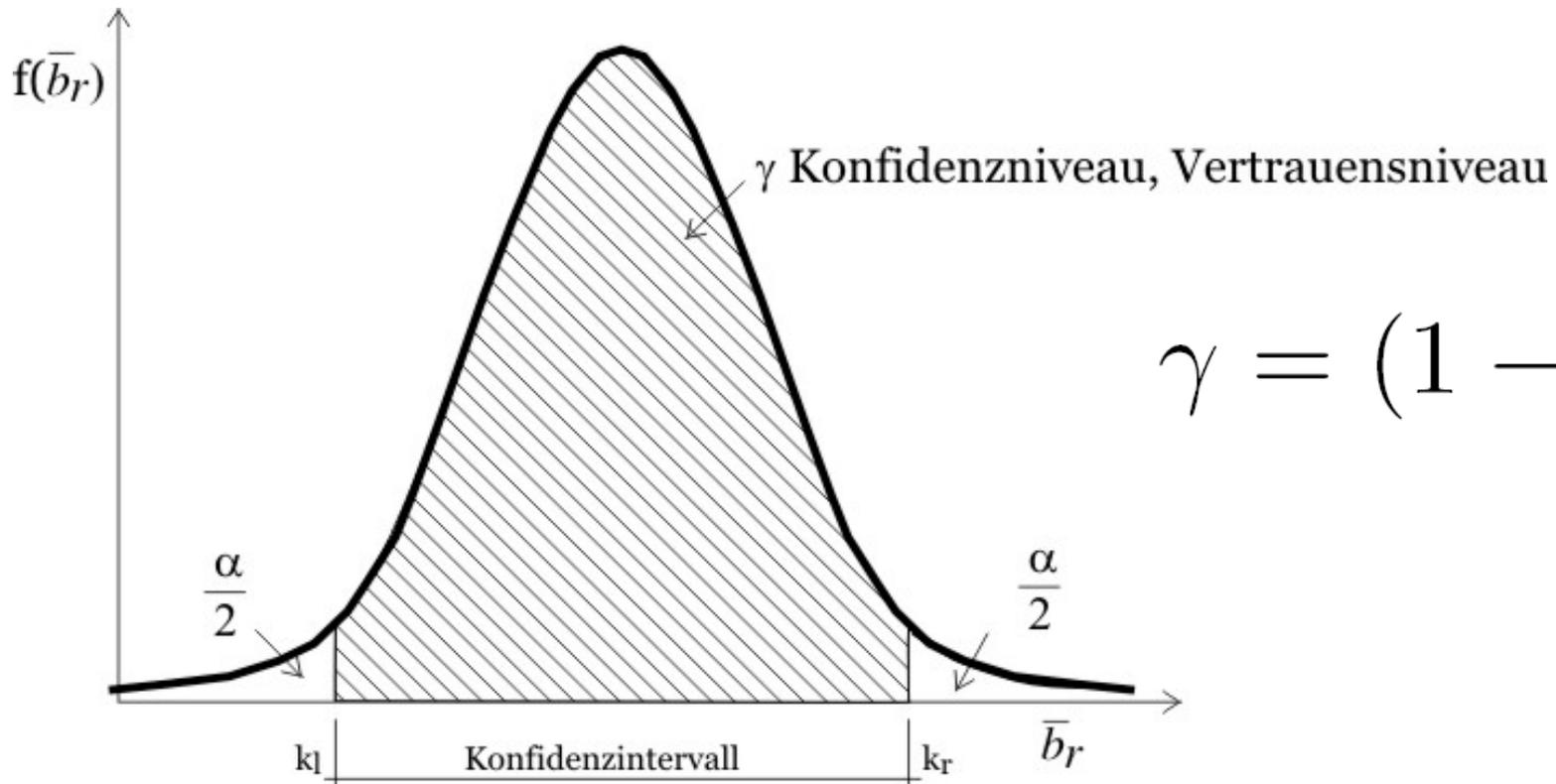


probabilistisches Ranking

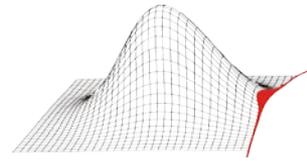




- Statistische Maße (z.B. Mittelwert, Standardabweichung ...) sind Punktschätzungen → enthalten keine Aussage über die Güte der Schätzung



$$\gamma = (1 - \alpha)$$



Relative Häufigkeit des Ereignisses n_f

$$\hat{p} = \frac{n_f}{n_{sim}}; \quad \hat{p} \rightarrow p \text{ sobald } n_{sim} \rightarrow \infty$$

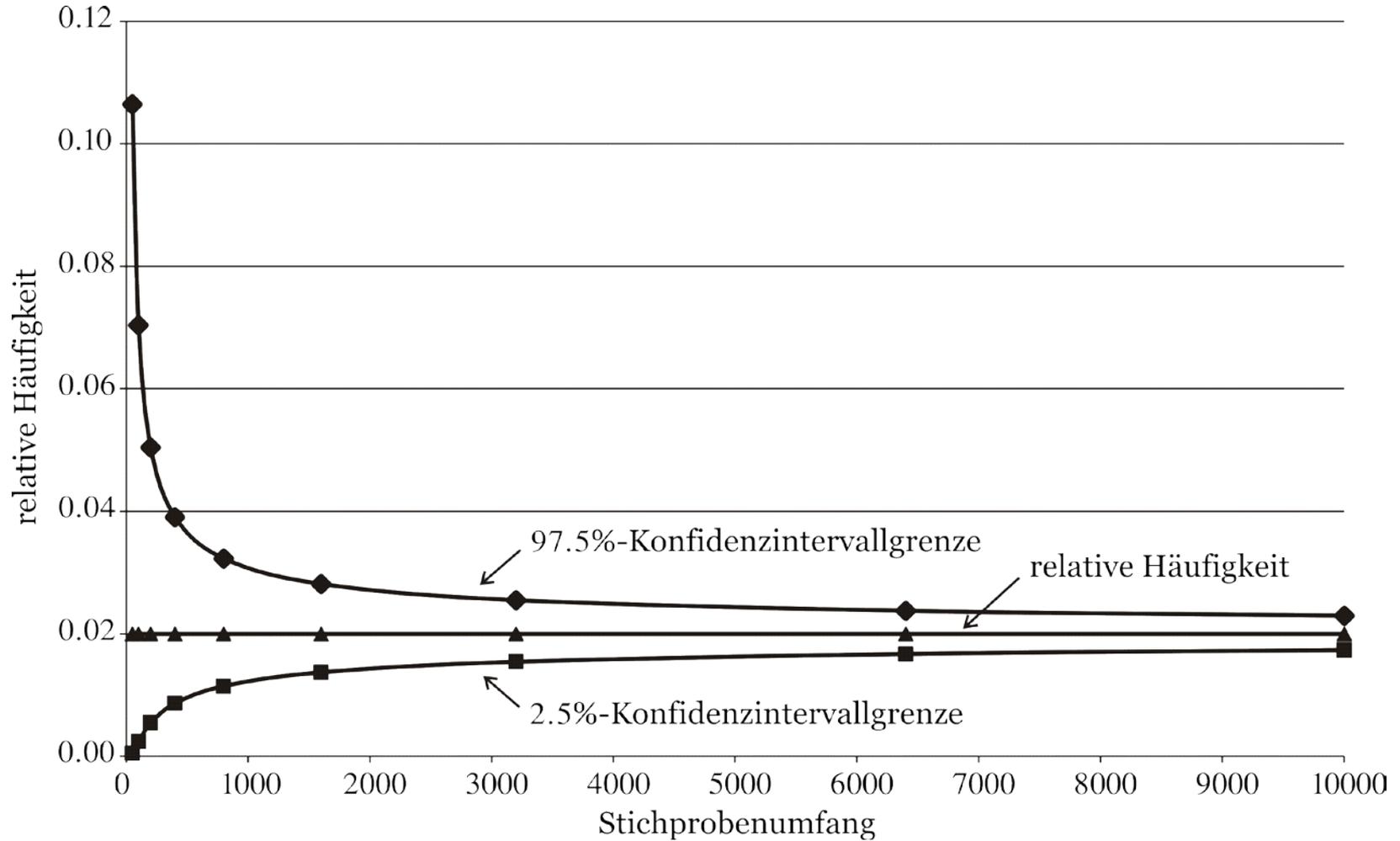
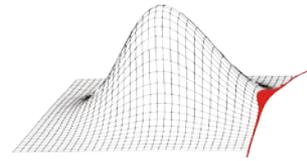
[1]

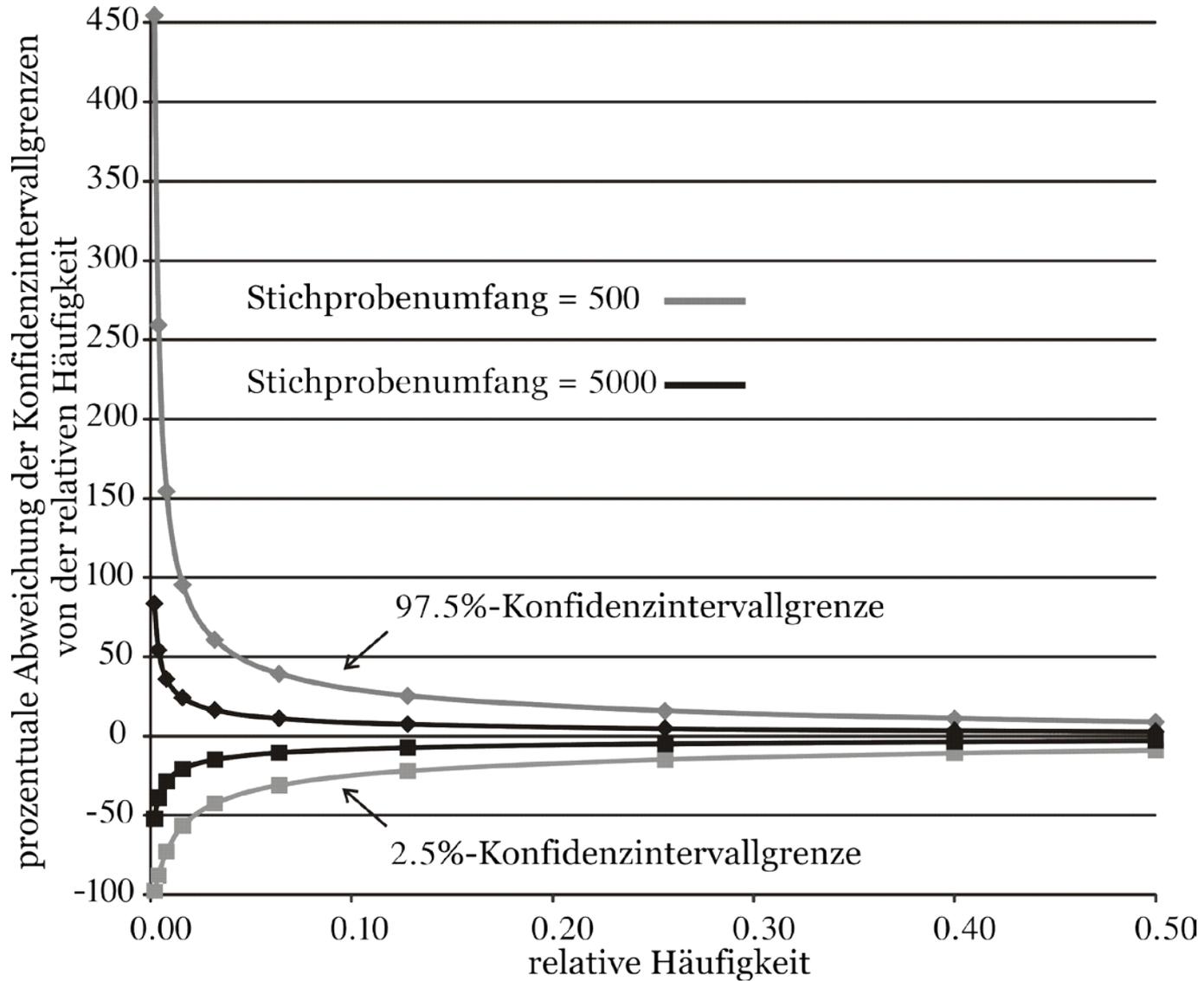
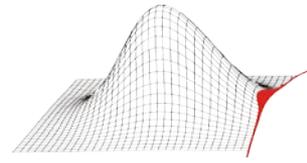
Linke Grenze:

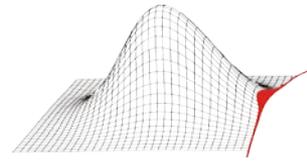
$$\frac{n_f}{n_f + (n_{sim} - n_f + 1) F_{\frac{\alpha}{2}; 2(n_{sim} - n_f + 1); 2n_f}}$$

Rechte Grenze:

$$\frac{(n_f + 1) F_{\frac{\alpha}{2}; 2(n_f + 1); 2(n_{sim} - n_f)}}{n_{sim} - n_f + (n_f + 1) F_{\frac{\alpha}{2}; 2(n_f + 1); 2(n_{sim} - n_f)}}$$







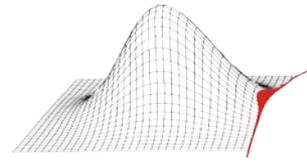
Weicht der Korrelationskoeffizient statistisch signifikant von Null ab, unterscheidet sich seine Verteilung von der Normalverteilung [1].

$$\dot{z} = \operatorname{arctanh} r \quad [3]$$

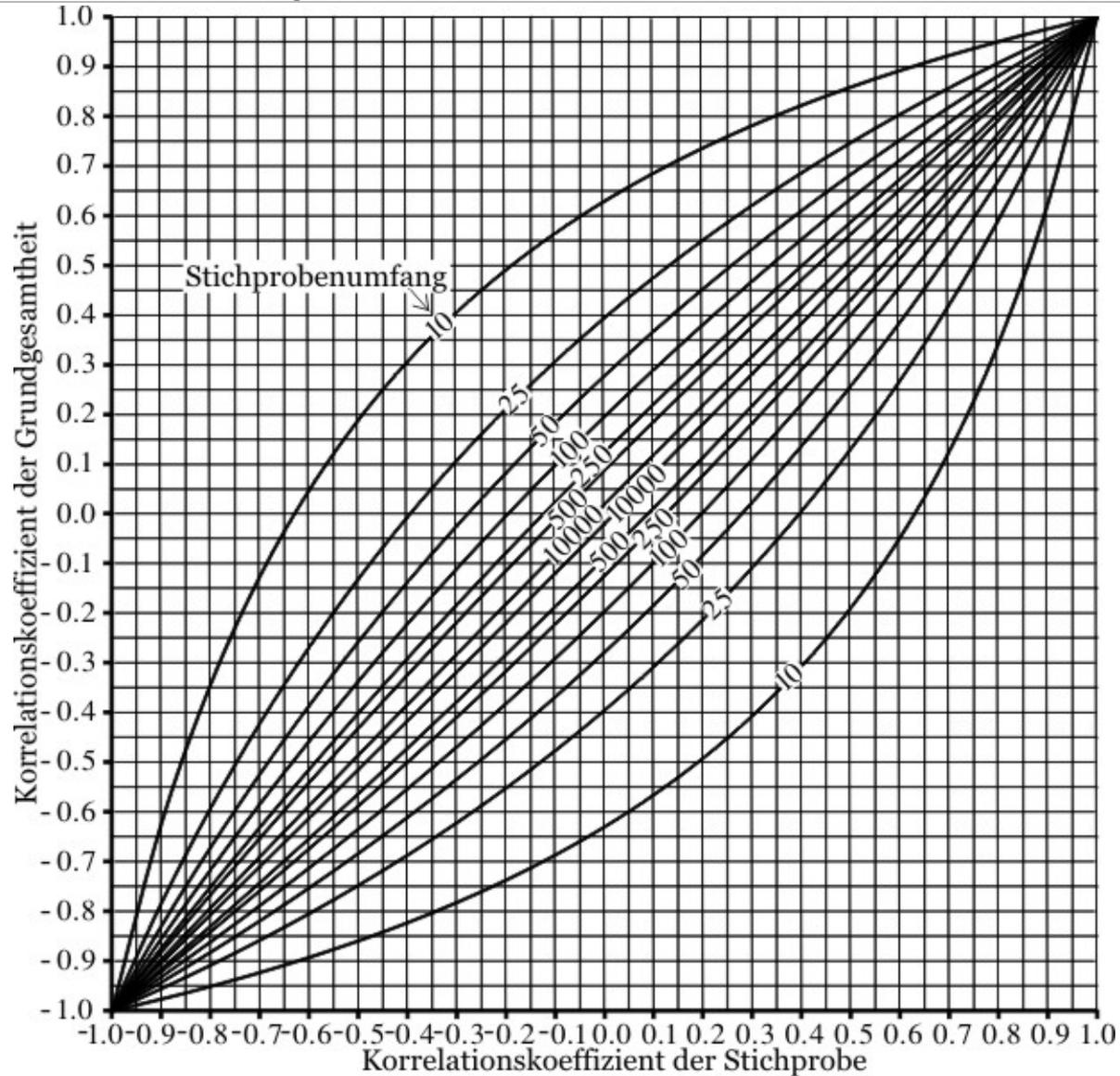
$$\dot{k}_l = \dot{z} - \frac{z_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n_{sim} - 3}}, \quad \dot{k}_r = \dot{z} + \frac{z_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n_{sim} - 3}}$$

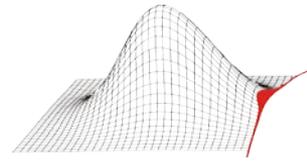
$$k_l = \tanh \dot{k}_l$$

$$k_r = \tanh \dot{k}_r$$

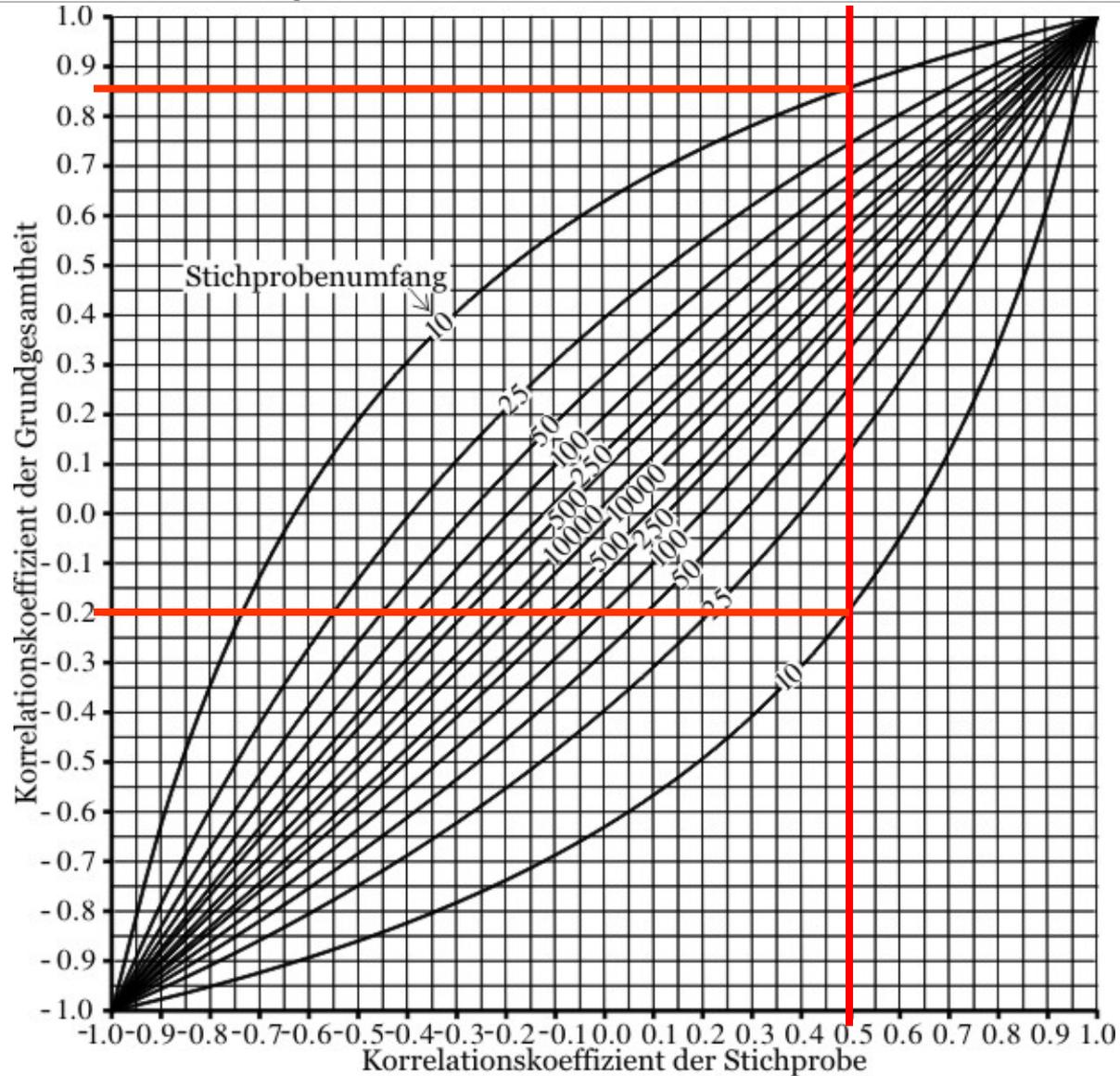


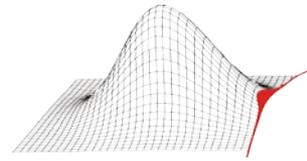
$(\alpha=0.05)$



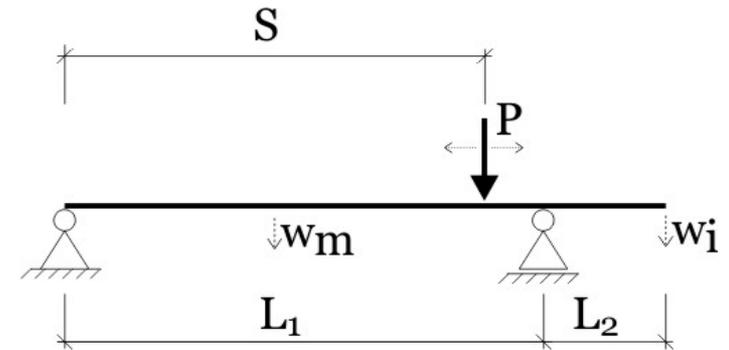
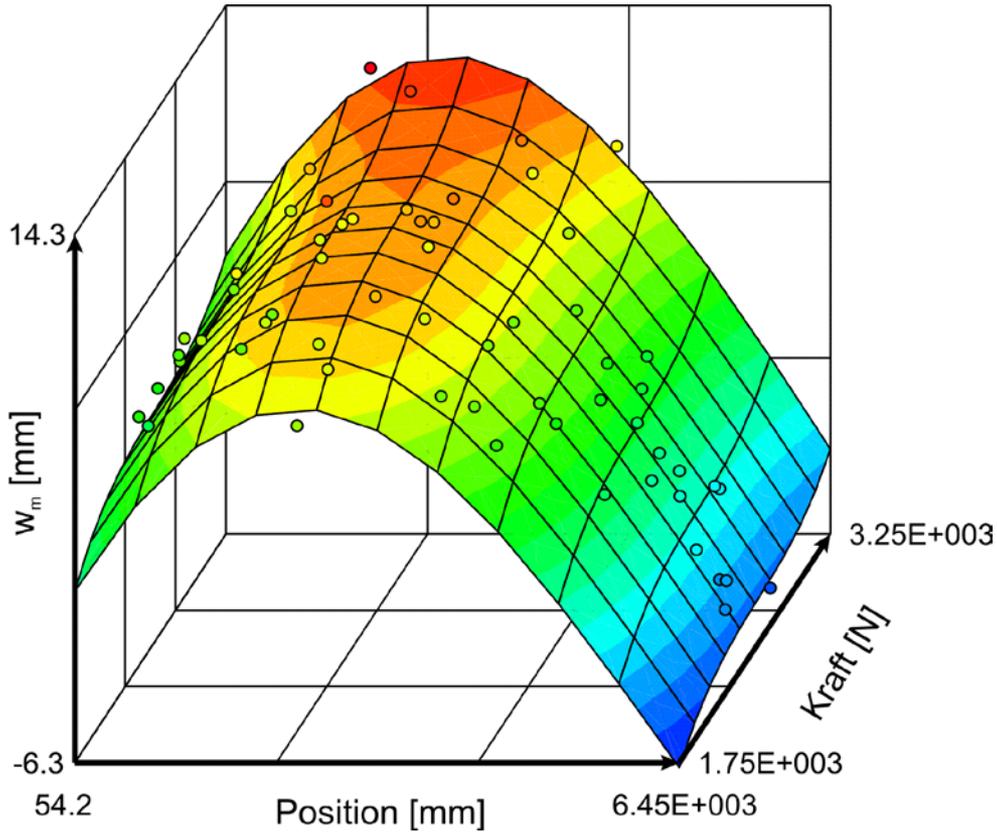
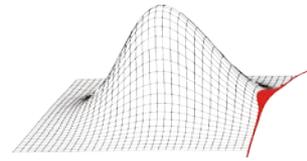


$(\alpha=0.05)$

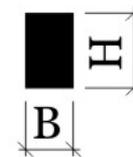


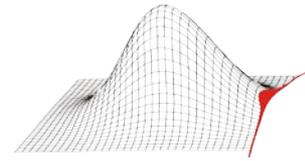


- Einleitung
- Theoretische Grundlagen der Statistik
- **Regression**
- Probabilistische Systemanalyse mit MCS



vergrößerte
Seitenansicht





- Antwortflächen sind mathematische Modelle (z.B. Polynome) zur Beschreibung des Systemverhaltens.
- Oftmals auch Metamodell oder Response Surface genannt.

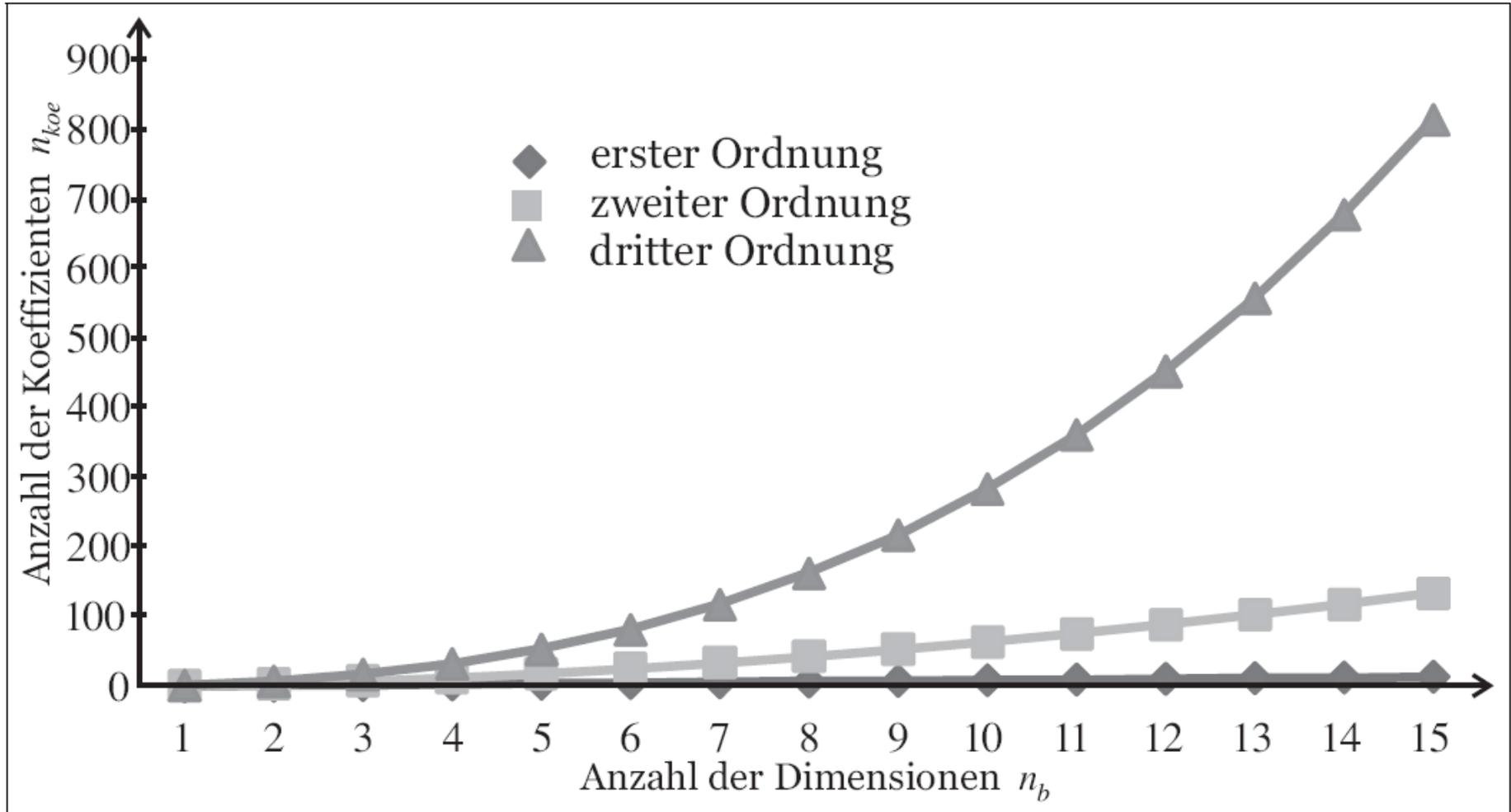
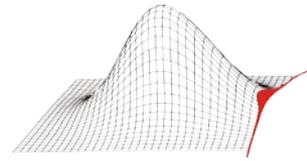
Beispiel: Antwortfläche 2. Ordnung (Polynom 2. Ordnung)

$$\tilde{y}_i = c_0 + c_1 \cdot b_{1,i} + c_2 \cdot b_{2,i} + c_3 \cdot b_{1,i}^2 + c_4 \cdot b_{2,i}^2$$

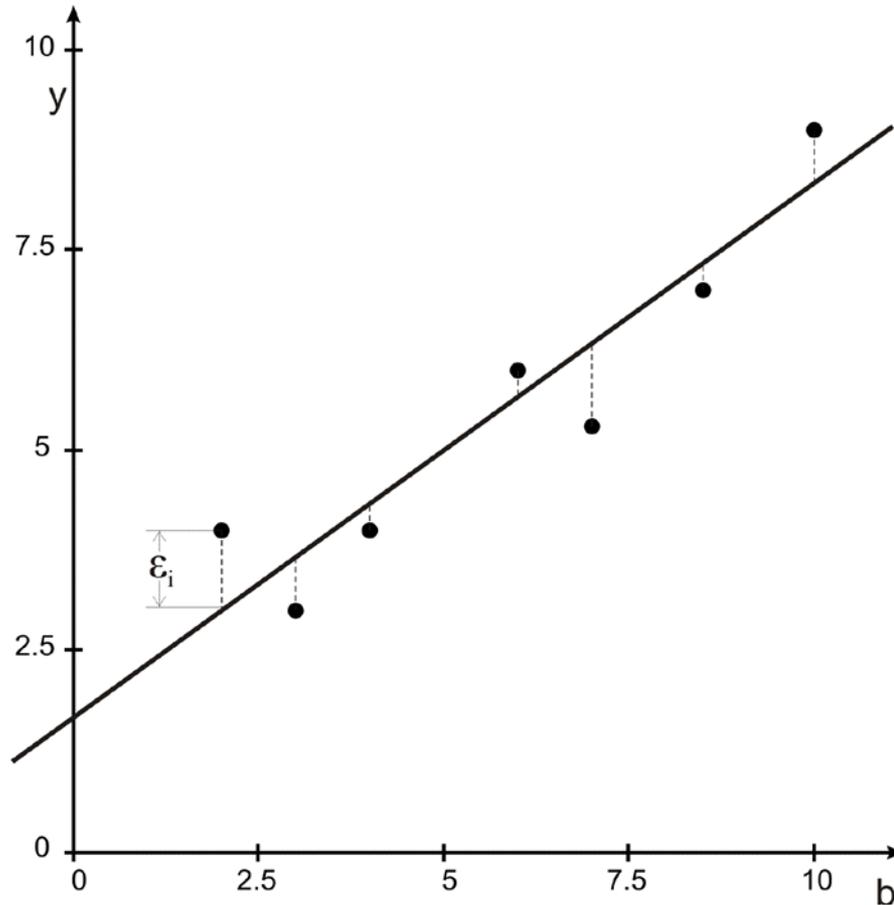
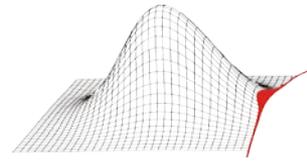
○ Ergebnisgröße

○ Koeffizienten

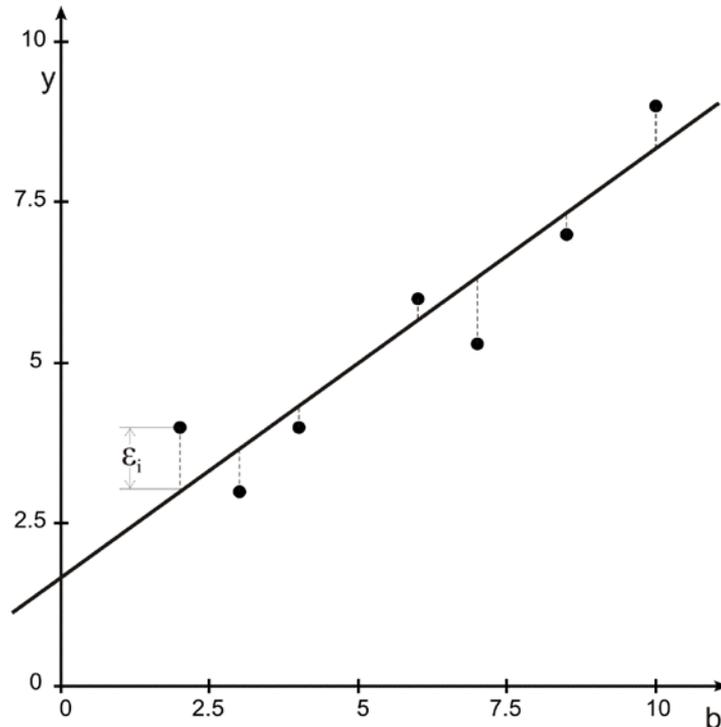
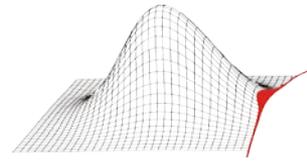
○ Eingangsgrößen



Anzahl der Stützpunkte \geq Anzahl der Koeffizienten

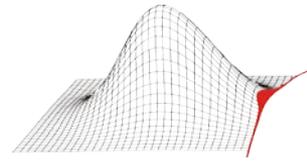


1. Punktwolke aus MCS
2. Typ der Antwortfläche festlegen
3. Koeffizienten so bestimmen, dass Summe der Fehlerquadrate minimal wird



1. Punktwolke aus MCS
2. Typ der Antwortfläche festlegen
3. Koeffizienten so bestimmen, dass Summe der Fehlerquadrate minimal wird

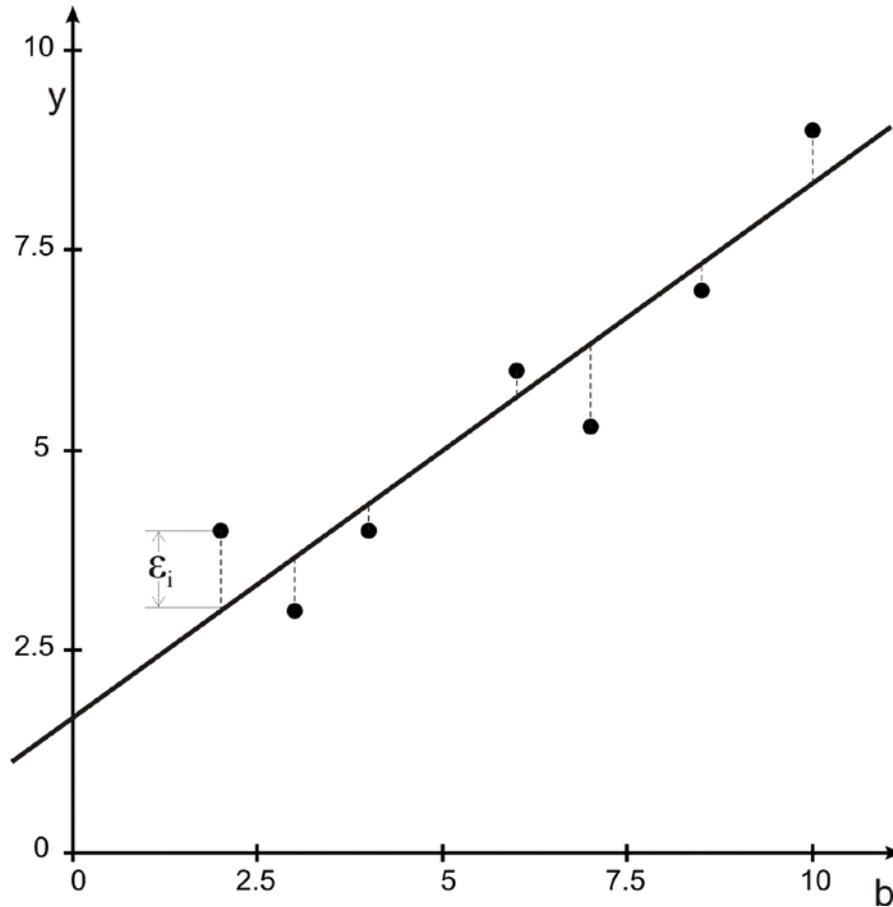
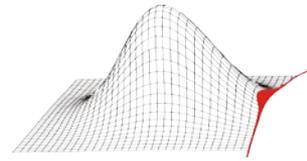
$$S = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \tilde{y}_i)^2 \longrightarrow \text{Minimum}$$



- Zur Bewertung der Güte von Antwortflächen kann das Bestimmtheitsmaß R^2 verwendet werden
- Das Bestimmtheitsmaß R^2 beschreibt den Anteil der Streuung der Ergebnisgröße, die sich durch die Antwortfläche beschreiben lässt
- R^2 ist das Quadrat des Korrelationskoeffizienten von y zu \tilde{y}

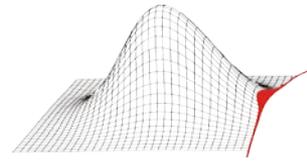
$$R^2 = r^2(y, \tilde{y})$$

- $R^2 = 0..1$



$$R^2 = 0,87$$

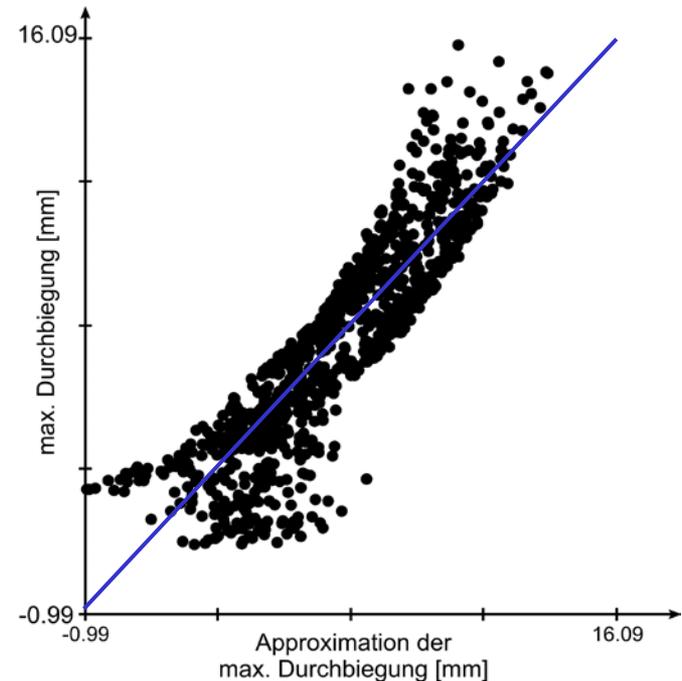
$$y = 1,68 + 0,65 * b + \varepsilon$$

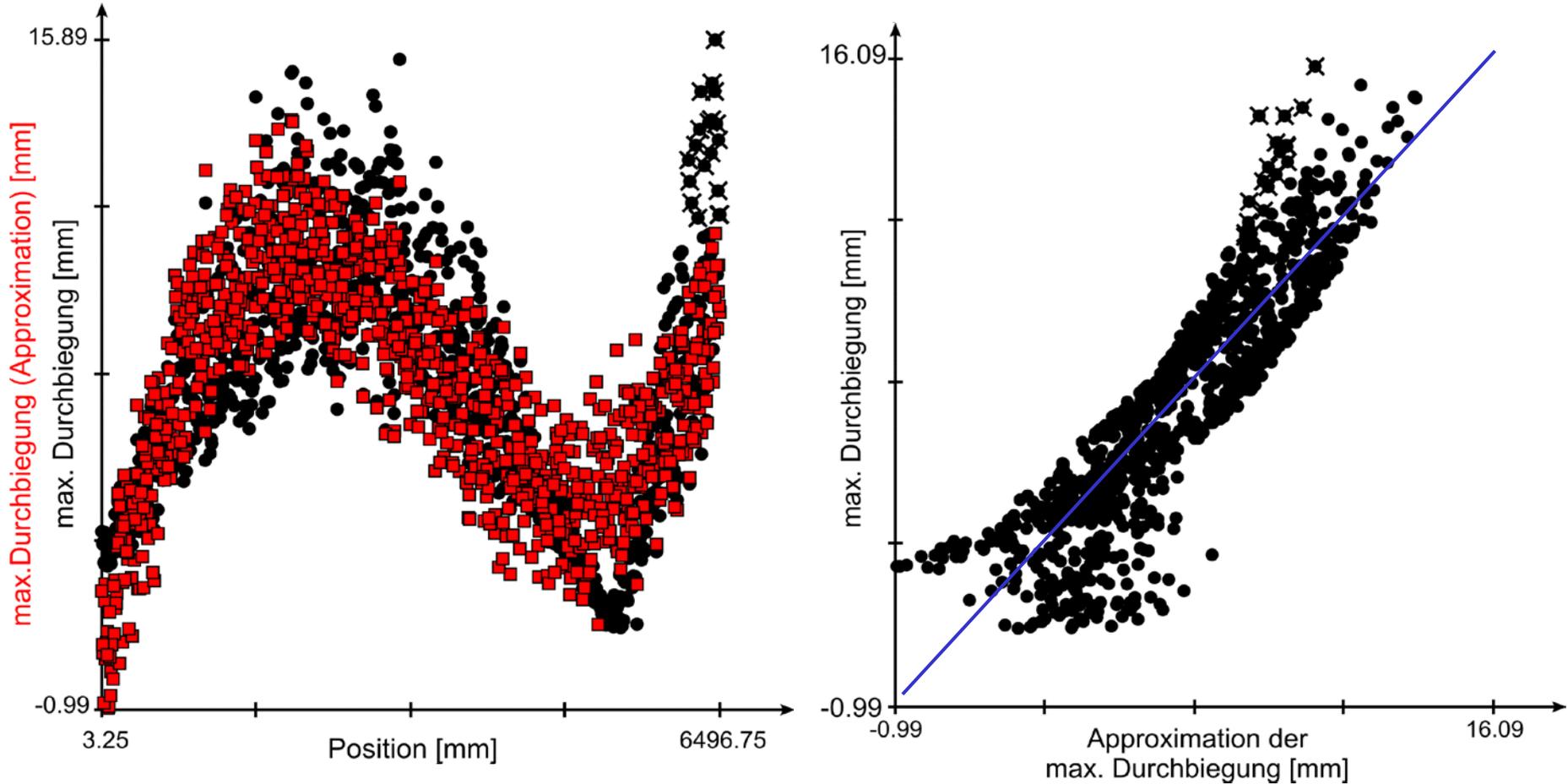
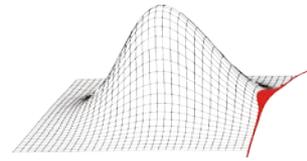


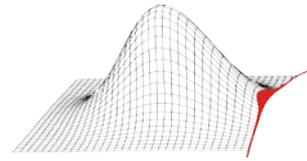
Träger Beispiel:

- 5 Eingangsgrößen
- Polynom 3. Ordnung (16 Koeffizienten)
- n_{sim} variiert
- Gleiche Parameter Streuung

n_{sim}	R^2
16	1,00
30	0,91
60	0,86
100	0,82
200	0,78
1000	0,79





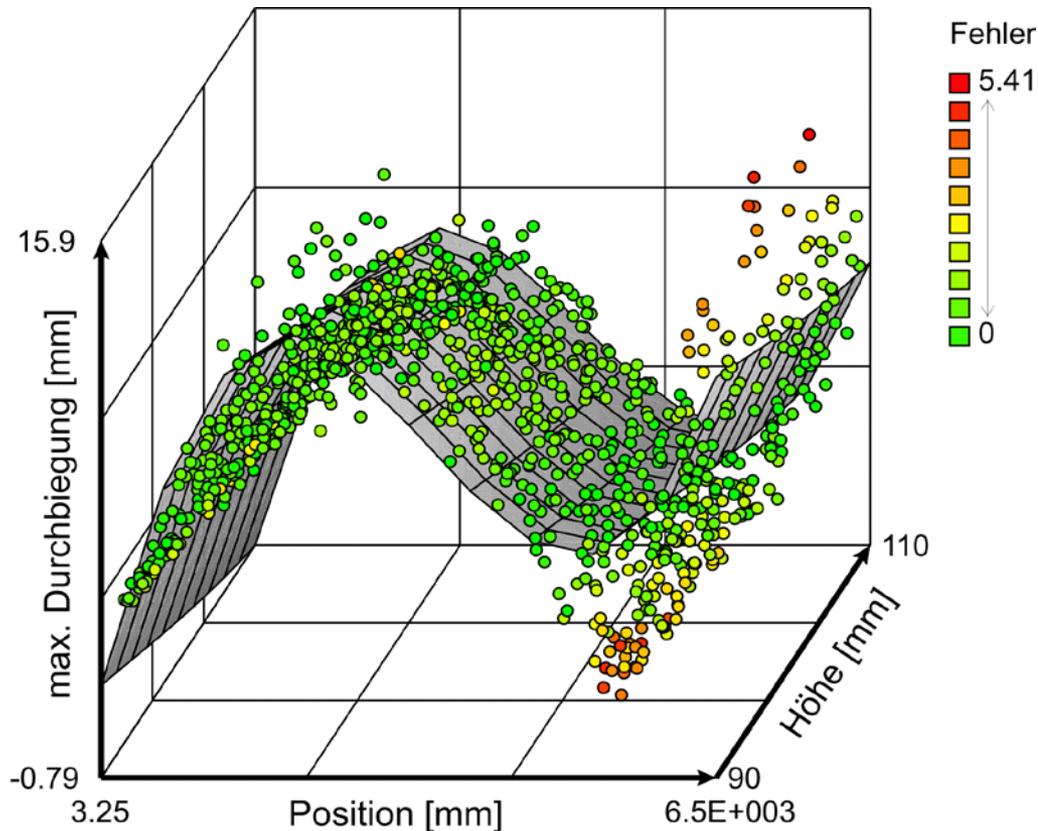
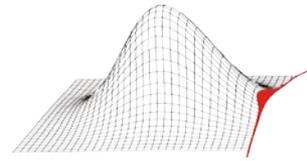


Vorteile:

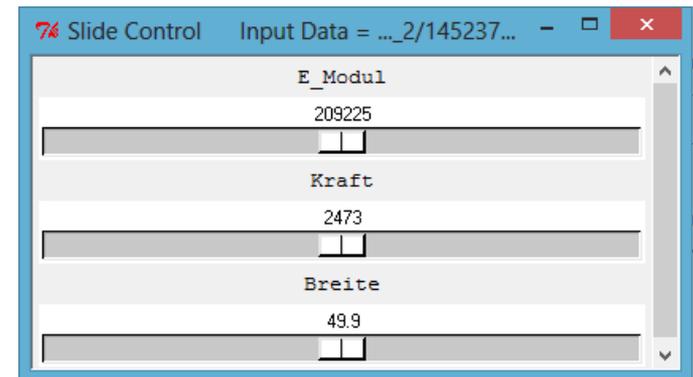
- Weit verbreitetes Maß zur Güte
- Vergleichbares, normiertes Maß des Approximationsfehlers
- Beschreibt den Anteil der Ergebnisgrößenstreuung, der durch das Modell beschrieben werden kann

Nachteile:

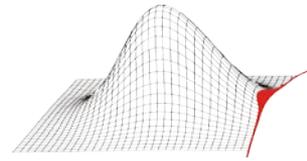
- Abhängig von der Anzahl der Stützpunkte
- Keine Aussage zum maximalen Fehler
- Macht nur Aussagen an den Stützpunkten
 - Hoher R^2 garantiert keine gute Vorhersage



Für $n_b > 2$ entspricht grafischer Abstand zwischen Antwortfläche und Stützpunkten nicht dem Approximationsfehler.

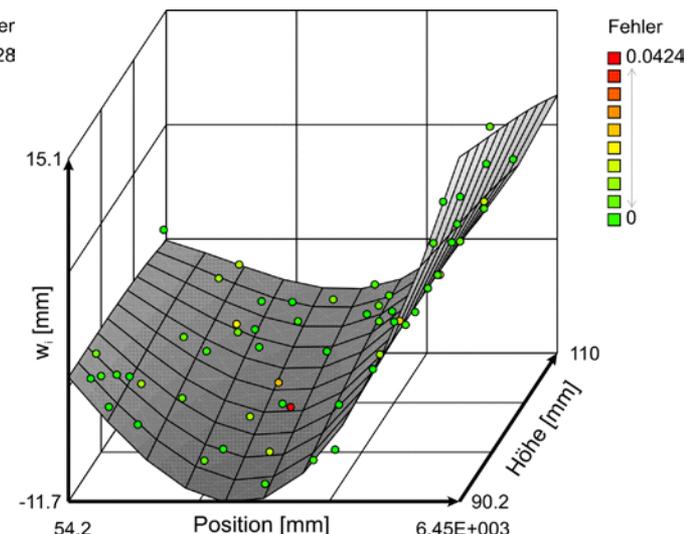
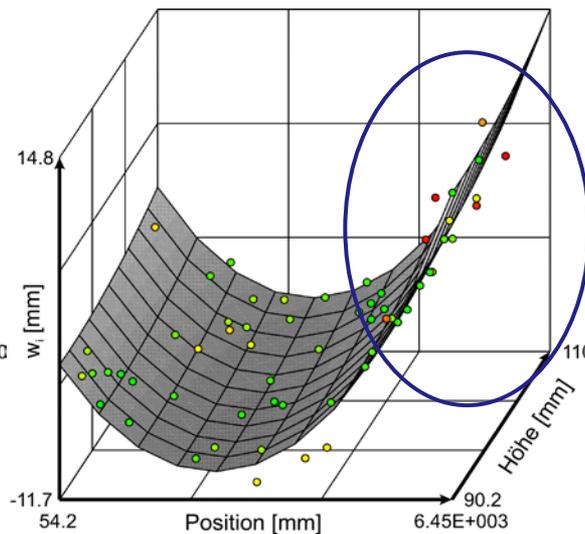
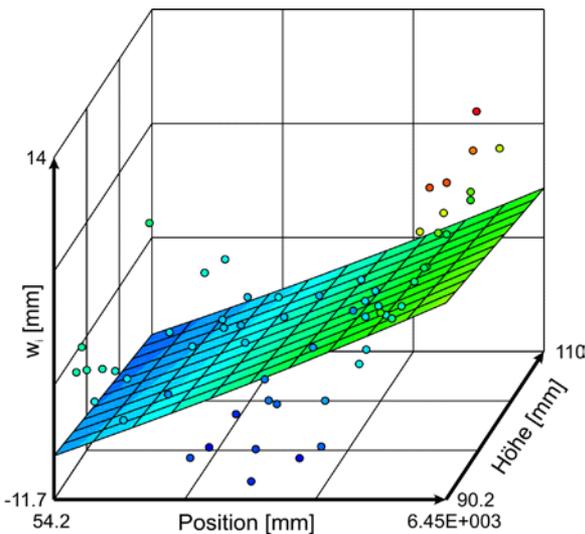


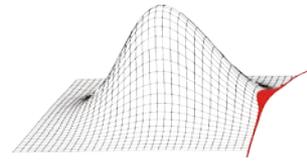
Approximationsfehler kann als Farbinformation dargestellt werden.



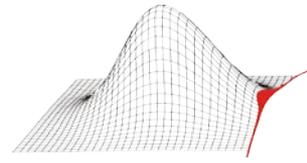
Eine grafische Kontrolle der Antwortflächen ist empfehlenswert

- Entspricht die Form der Antwortfläche der Punktwolke?
- Wo sind die Fehler groß?
- Sind die Fehler im Vergleich annehmbar?





- Sensitivitätsanalyse mit COI
- Schnelle Systemanalyse durch Erzeugen sehr vieler neuer Datenpunkte
- Ersetzen des Deterministischen Modelles mit dem Meta-Modell



COI – Coefficient of Importance [9]

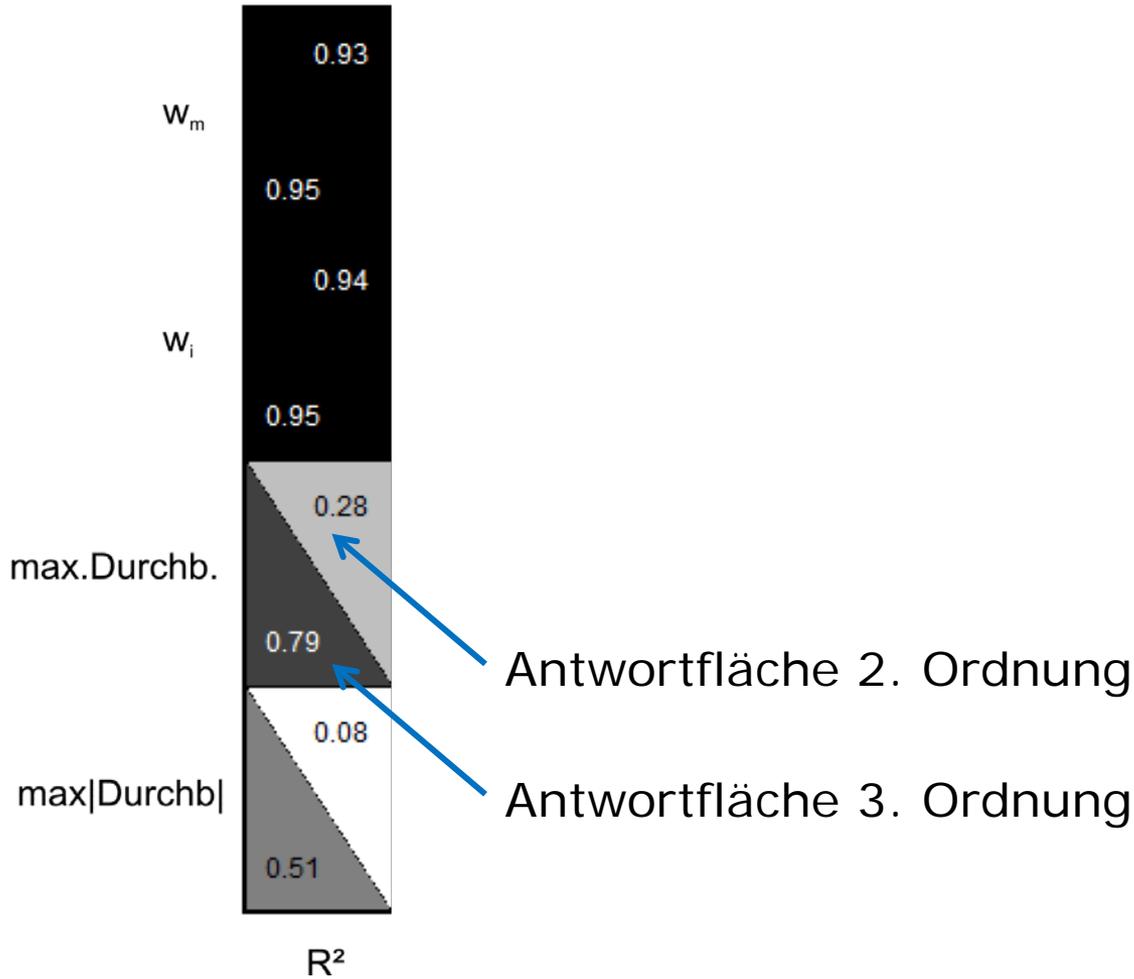
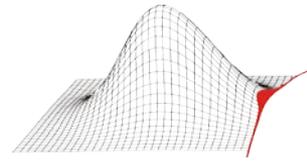
Bewertet den Einfluss einer Eingangsgröße auf eine Ergebnisgröße, über Antwortflächen.

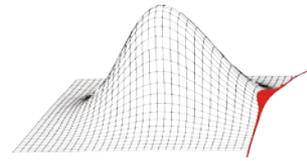
$$COI = R^2 - R_e^2$$

R^2 : Bestimmtheitsmaß der Antwortfläche

R_e^2 : Bestimmtheitsmaß einer Antwortfläche, bei der der Einfluss der betrachteten Eingangsgröße \mathbf{b}_e nicht berücksichtigt ist

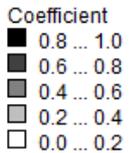
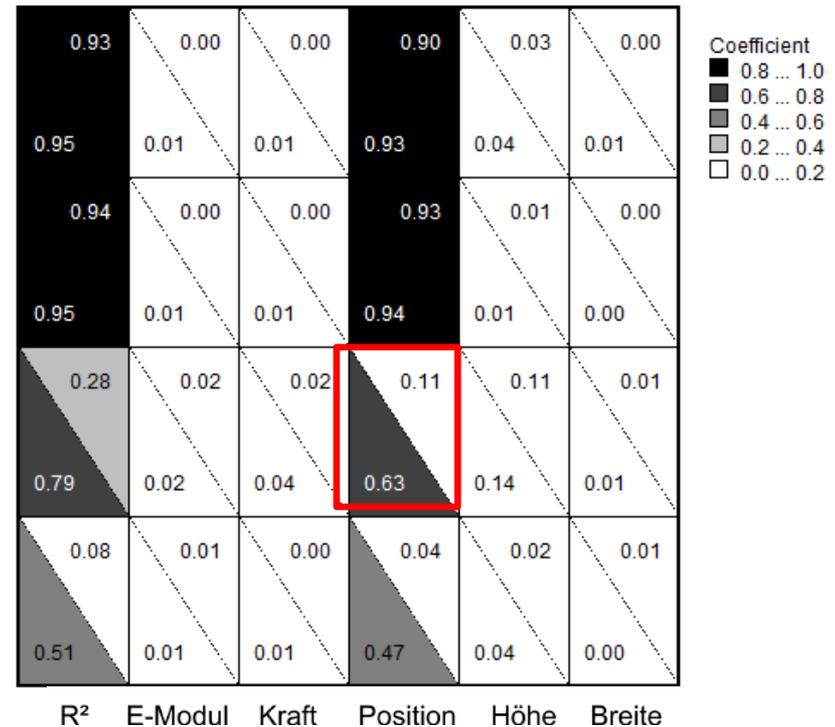
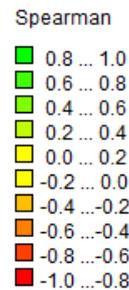
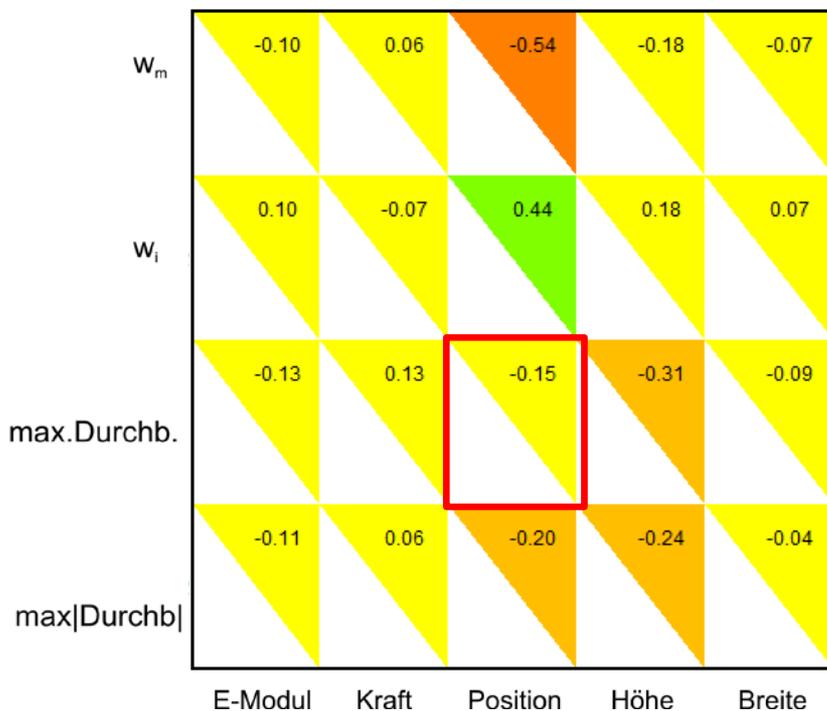
Wenn nicht berücksichtigte Eingangsgröße wichtig war, dann ist $R_e^2 \ll R^2$ und daher hoher COI.

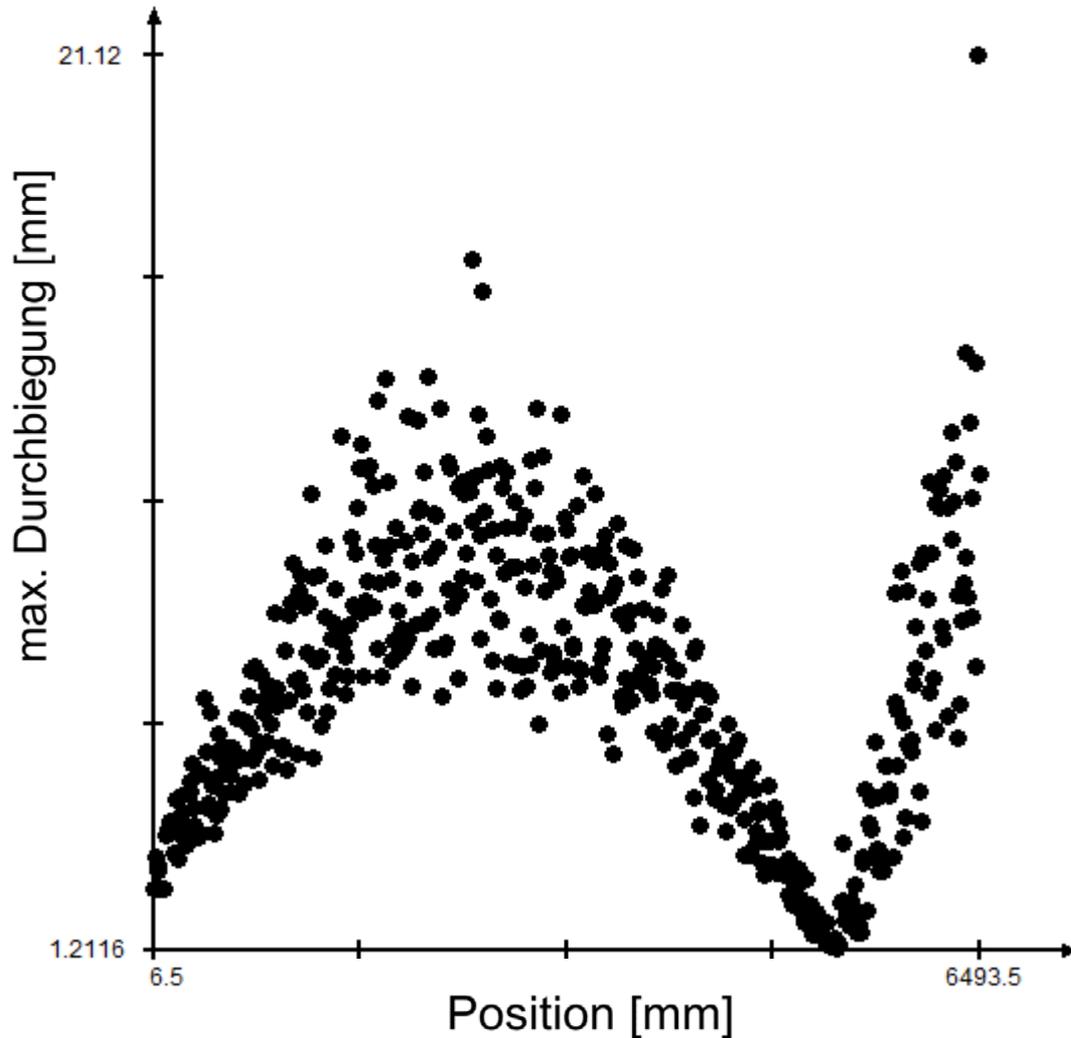
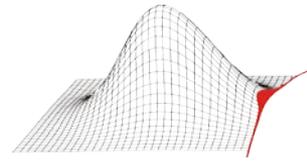




Vorteile der COI-Matrix gegenüber der Korrelationsmatrix zur Sensitivitätsanalyse:

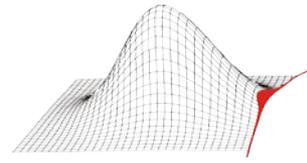
1. Erkennen von nicht monotonen Zusammenhängen





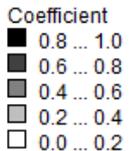
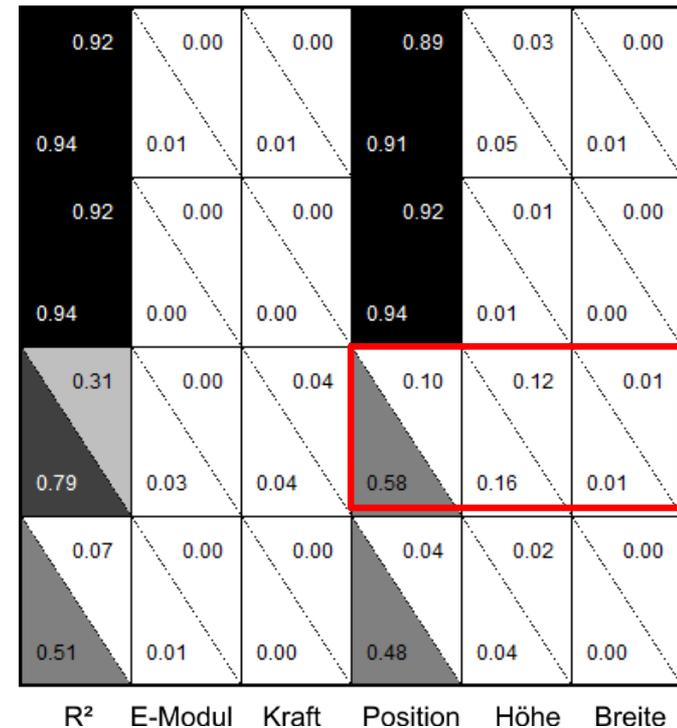
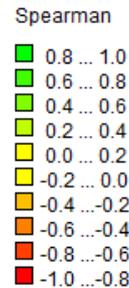
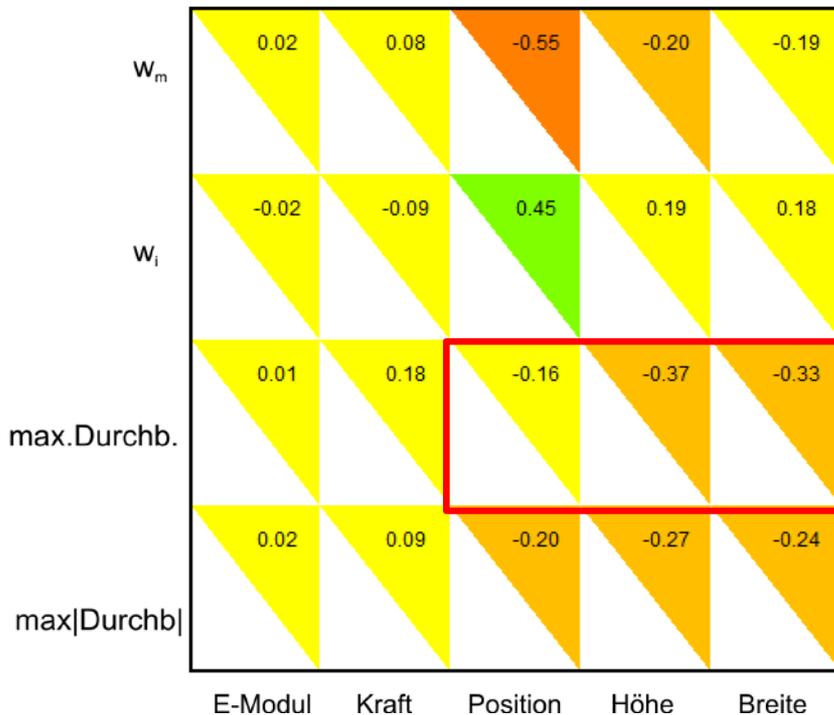
$$r = -0,15$$

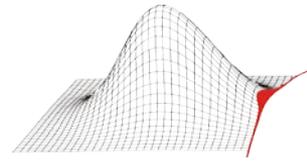
$$\text{COI} = 0,63 \quad (R^2 = 0,79)$$



Vorteile der COI-Matrix gegenüber der Korrelationsmatrix zur Sensitivitätsanalyse:

1. Erkennen von nicht monotonen Zusammenhängen
2. „fokussierte“ Sensitivitätsaussage

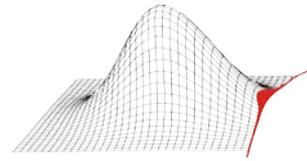




Wann sind Antwortflächen als Meta-Model geeignet?

Wenn die Antwortfläche das Systemverhalten gut beschreibt, dazu gibt es folgende Indizien:

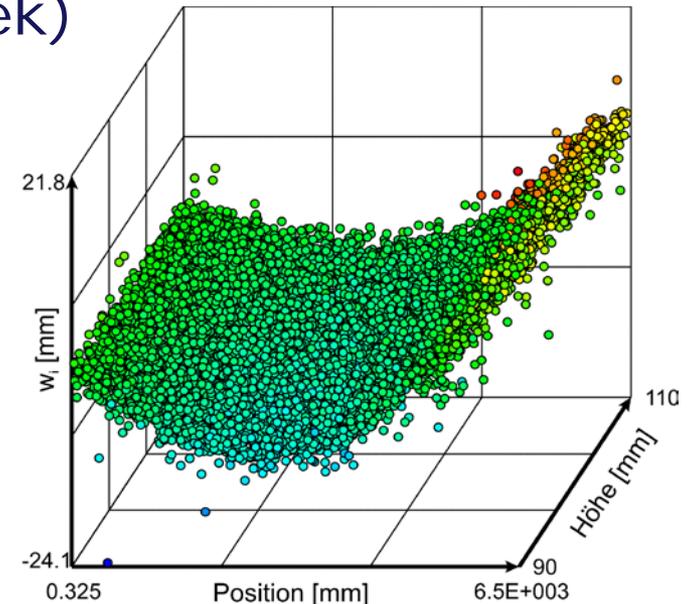
- $R^2 \geq 0,8$
- Approximationsfehler im „interessanten“ Bereich gering → graphisch überprüfen

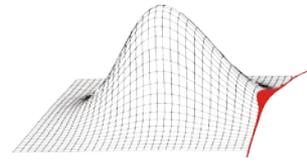


Sind die Antwortflächen validiert, kann eine neue MCS mit sehr vielen (~ 10.000) Samples aufgesetzt werden. Die Antwortfläche dient dabei als Berechnungsmodell.

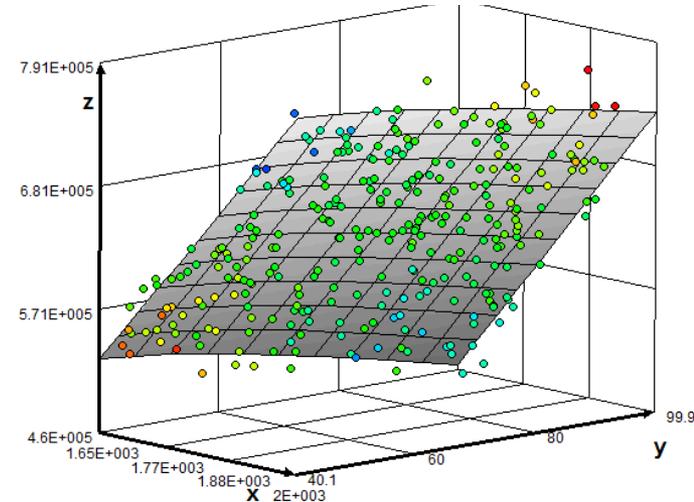
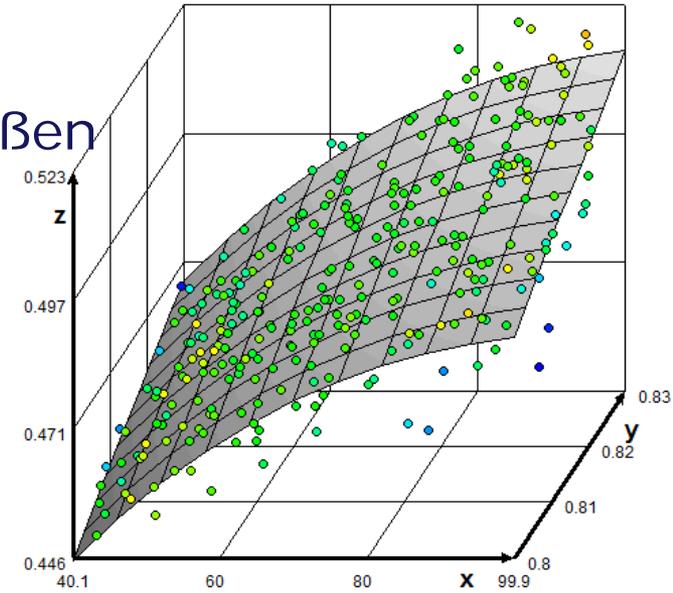
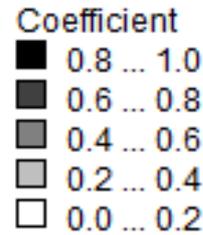
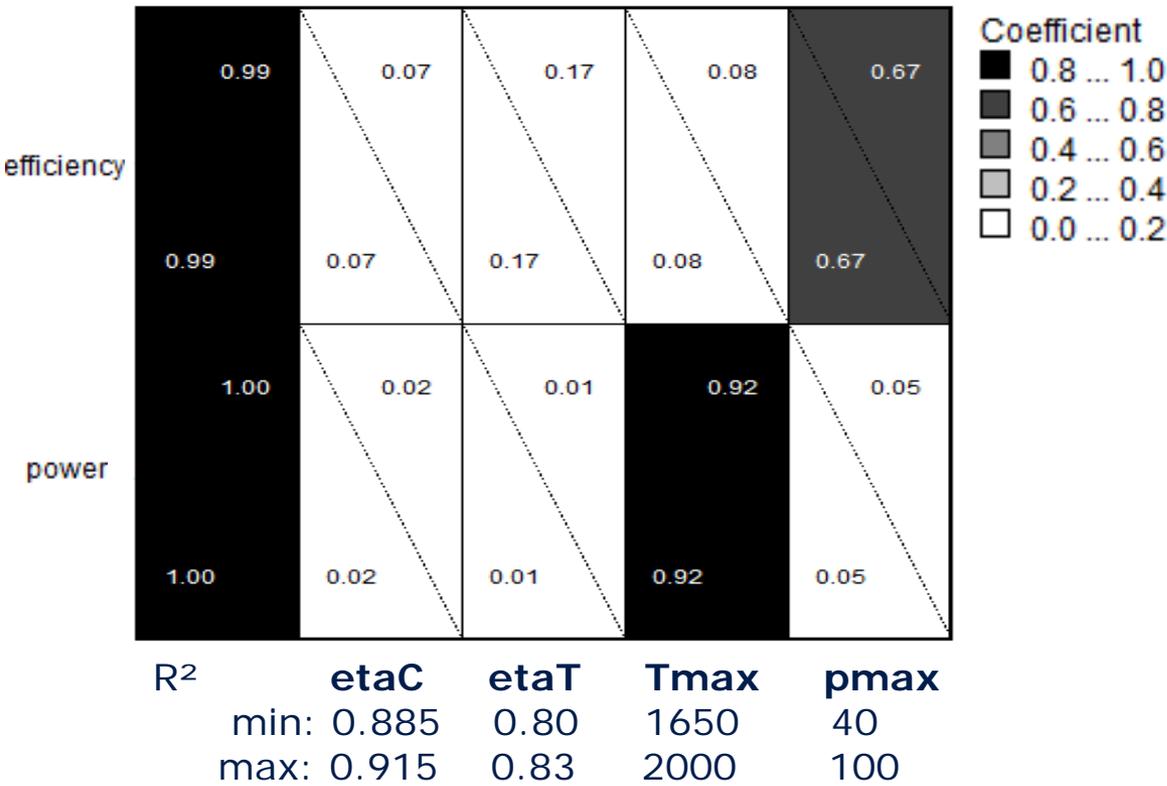
Vorteil: Rechengeschwindigkeit
(10.000 Samples $<$ 1 Sek)

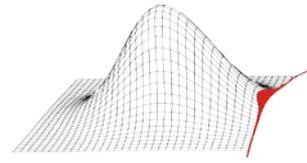
Aus den 10.000 MCS werden nun der/die beste(n) Samples(s) mit dem deterministischen Modell überprüft.





Beispiel: Triebwerks Kreisprozess 300er MCS mit gleichverteilten Eingangsgrößen



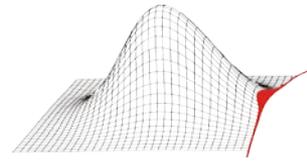


Beispiel: Triebwerks Kreisprozess Antwortfläche als Meta-Modell geeignet?

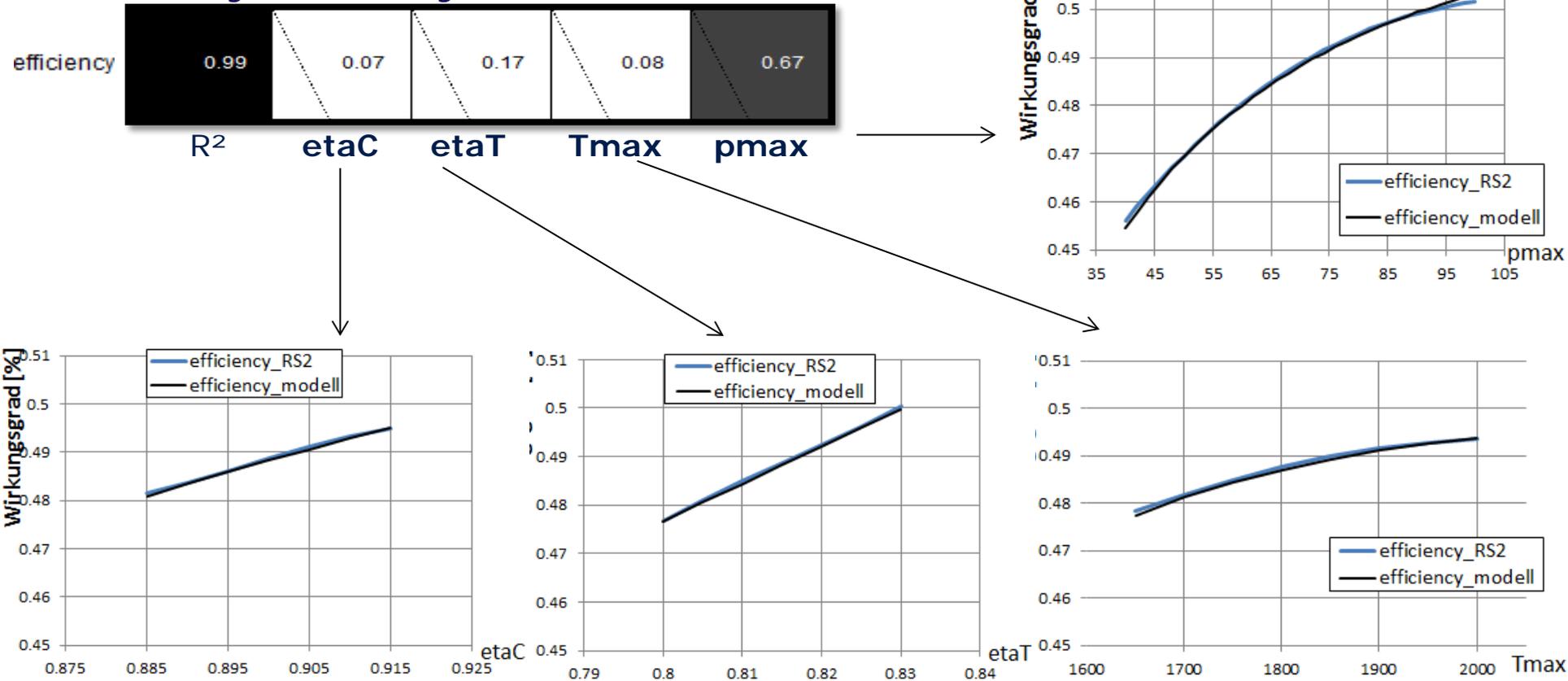
	Wirkungsgrad	Leistung
R^2	0.99	1
Durchschnittl. rel. Fehler	0.26%	0.36%
Maximaler rel. Fehler	1.5%	1.8%

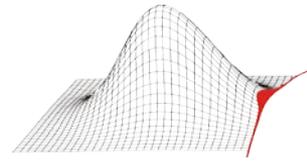
→ Untersuchung des Systemverhaltens unter Nutzung des Meta-Modells durch Variation eines einzelnen Parameters und festhalten der übrigen.

→ Modell ist Polynom 3. Ordnung ohne gem. Terme

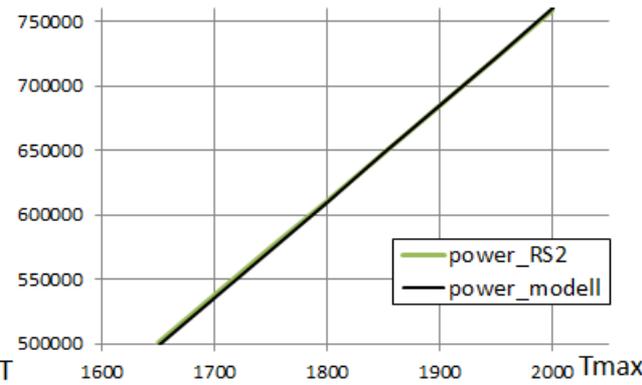
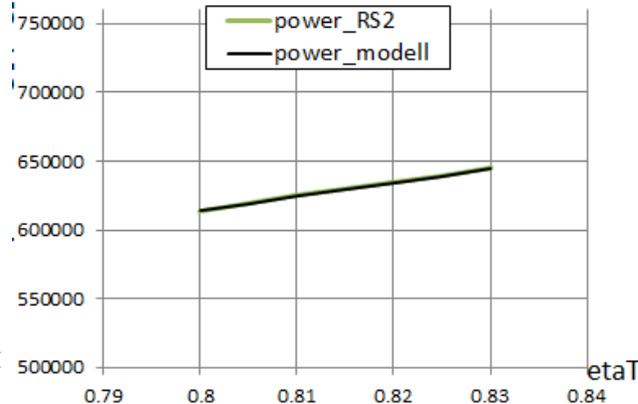
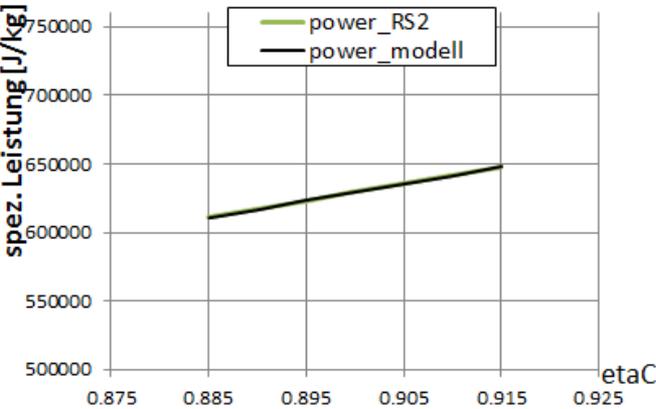
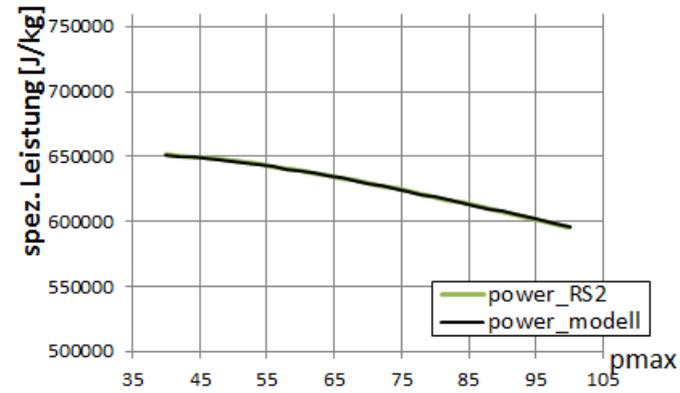
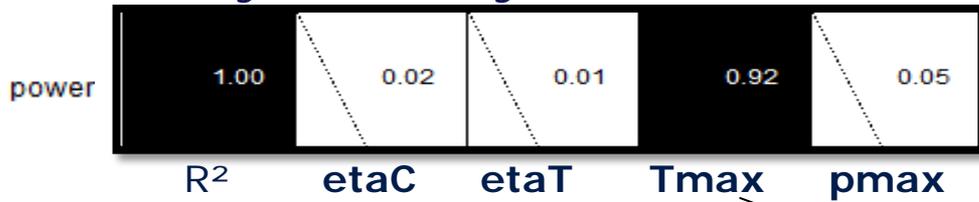


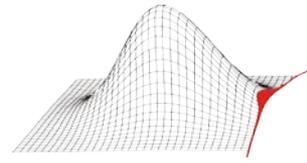
Beispiel: Triebwerks Kreisprozess Analyse des Systems im Zentrum



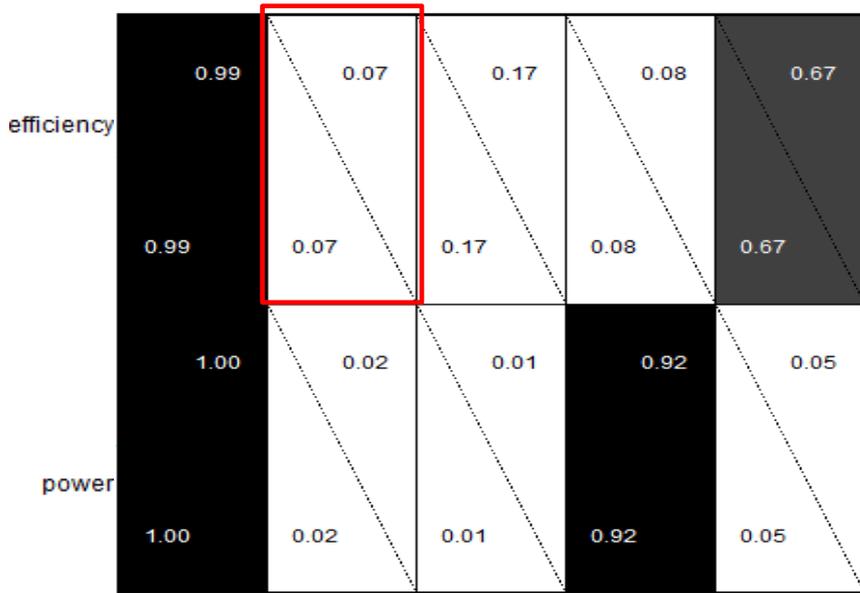


Beispiel: Triebwerks Kreisprozess Analyse des Systems im Zentrum

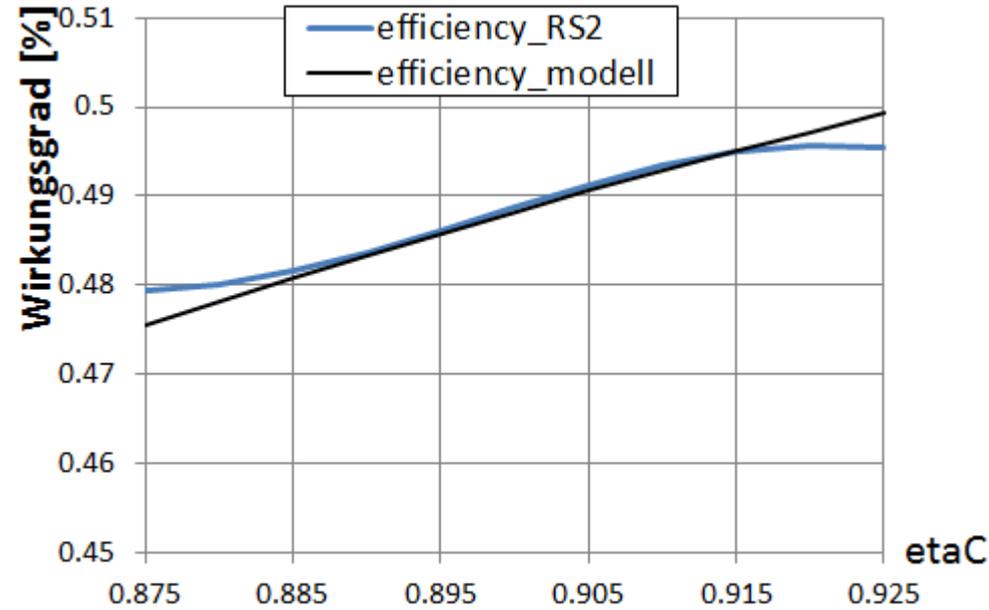




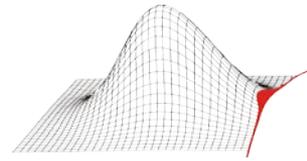
Beispiel: Triebwerks Kreisprozess Extrapolation über die Grenzen der Datenbasis



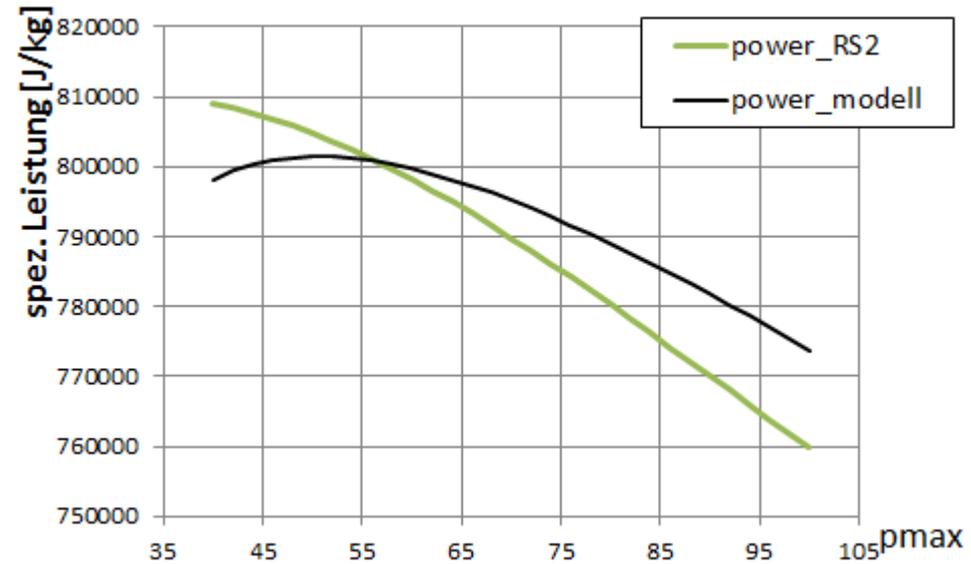
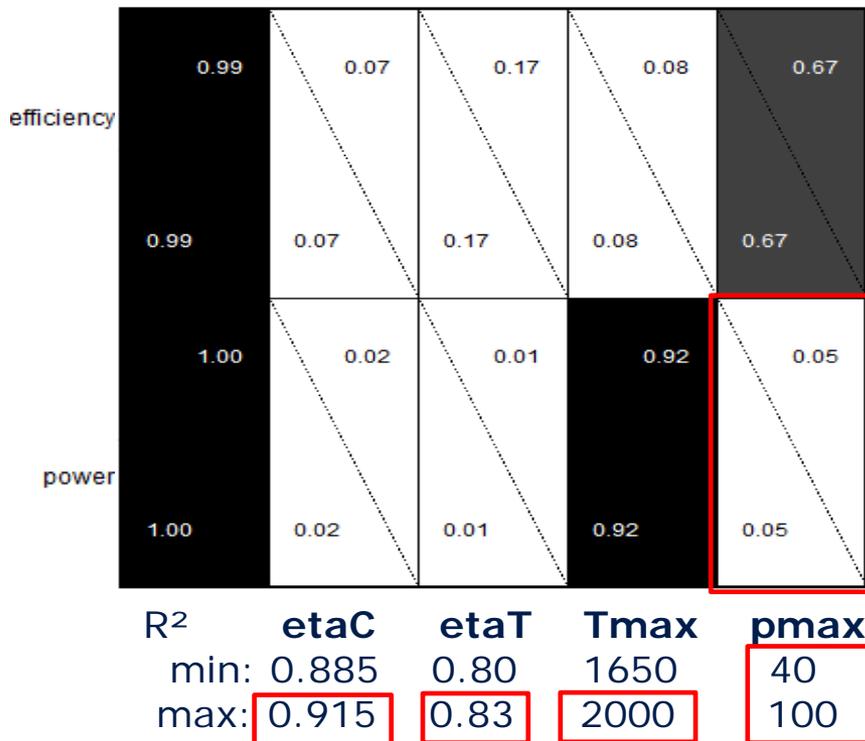
R ²	etaC	etaT	Tmax	pmax
min:	0.885	<u>0.80</u>	<u>1650</u>	<u>40</u>
max:	0.915	0.83	2000	100



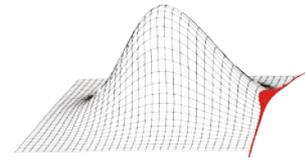
Außerhalb der Systemgrenzen
kann sich das Verhalten der
Antwortfläche ungünstig verändern



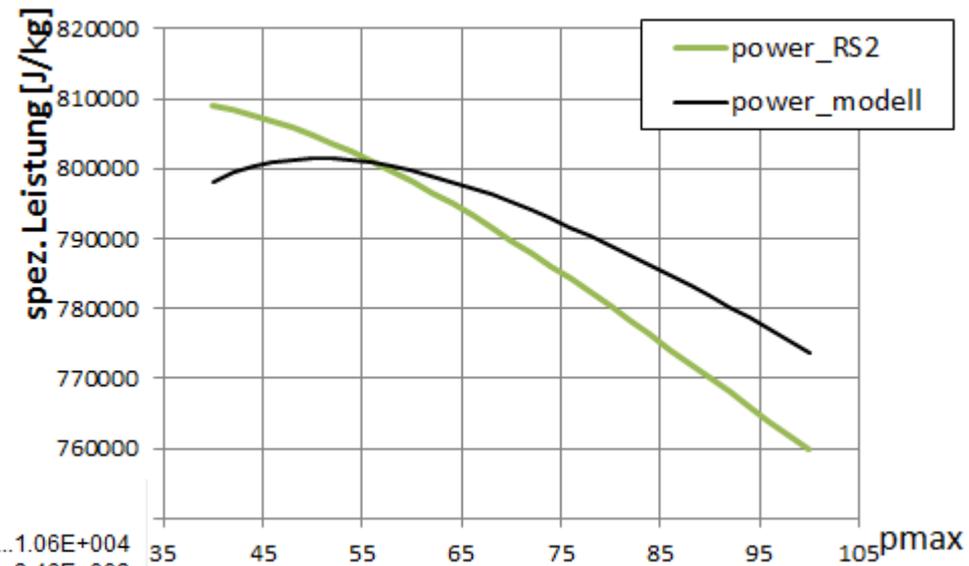
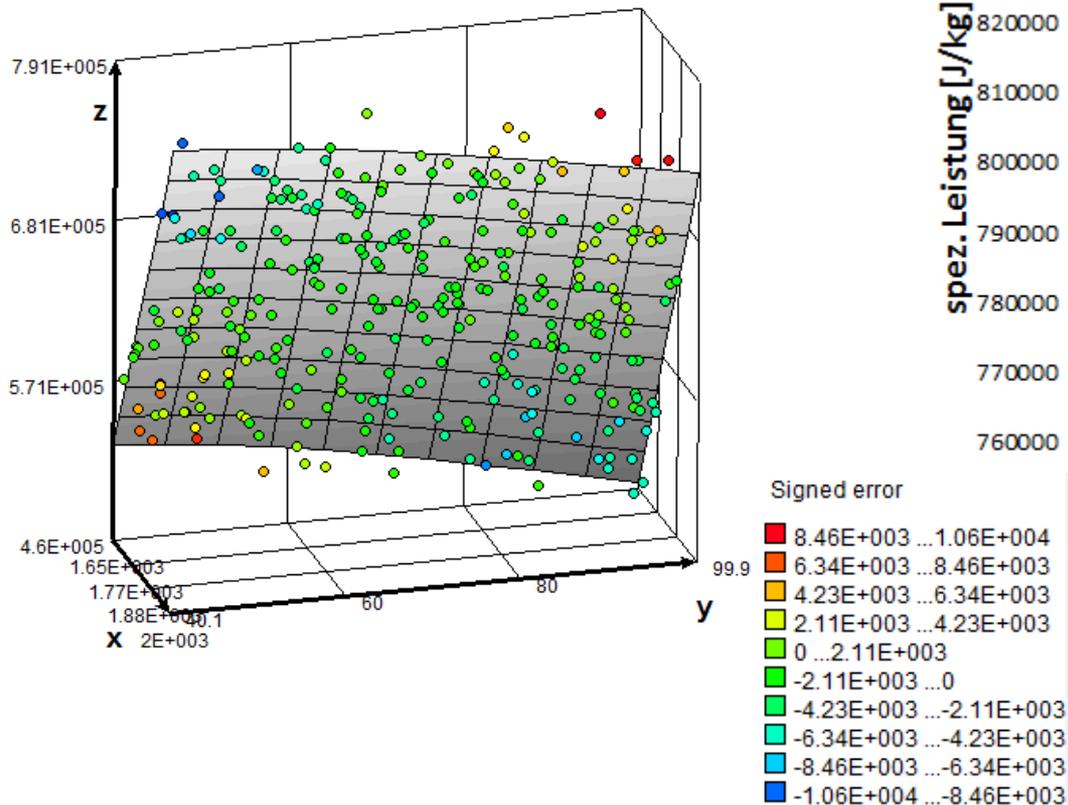
Beispiel: Triebwerks Kreisprozess Detailanalyse des Systems am Maximum



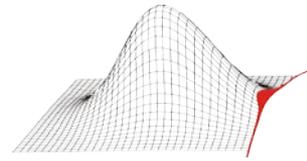
Vorsicht bei
Detailinterpretationen
an den Systemgrenzen!



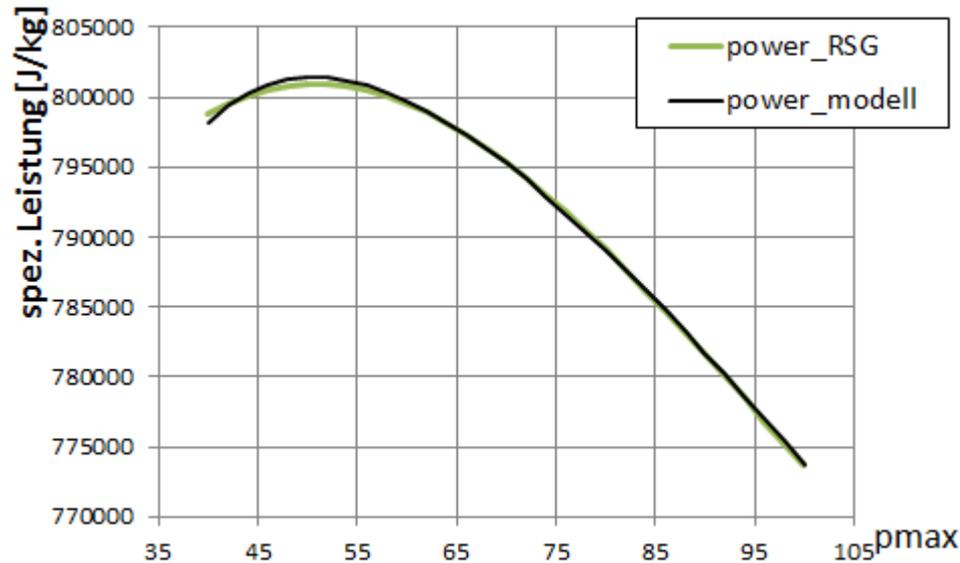
Beispiel: Triebwerks Kreisprozess Detailanalyse des Systems am Maximum



Vorsicht bei
Detailinterpretationen
an den Systemgrenzen!

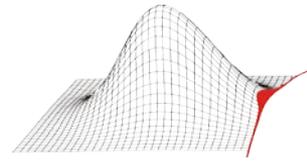


Beispiel: Triebwerks Kreisprozess Verbesserung der Approximation am Rand möglich?

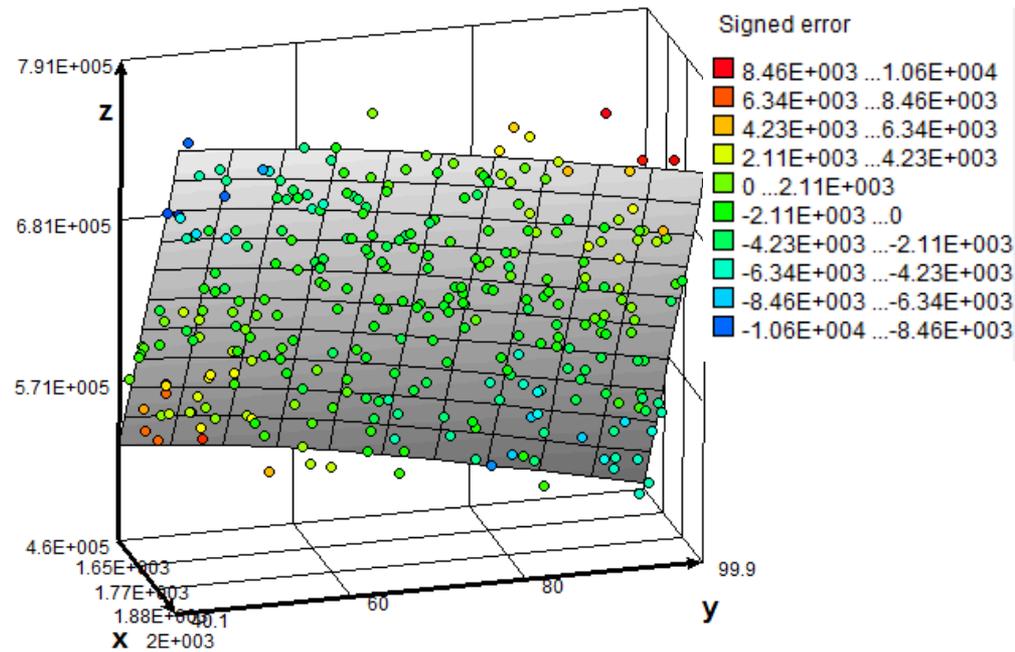
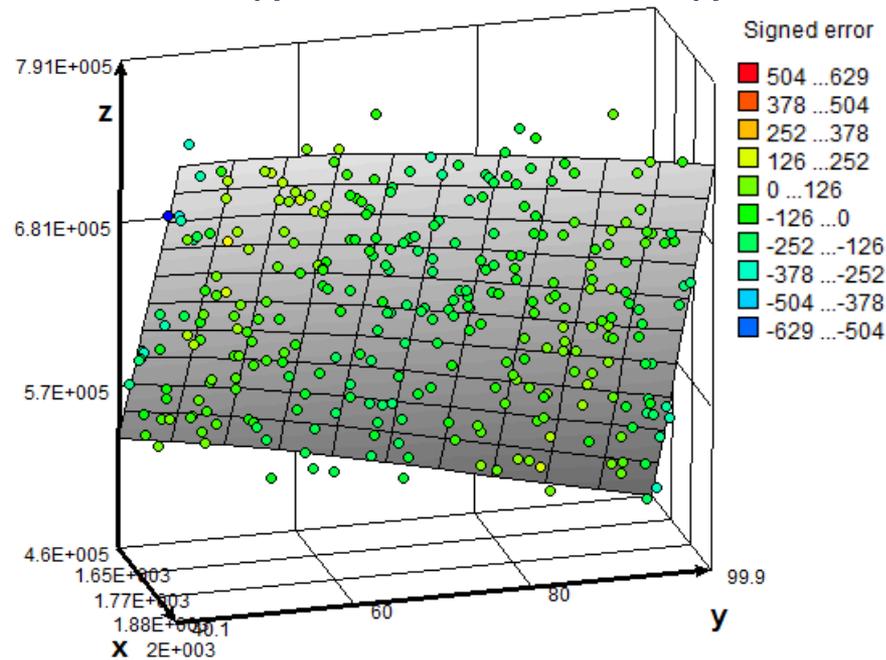


Durch das Hinzufügen von gemischten Termen wird hier eine sehr gute Approximation im gesamten Untersuchungsraum ermöglicht.

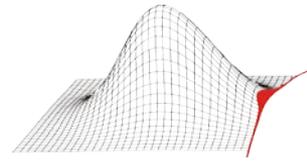
	Wirkungsgrad	Leistung
R^2	1	1
Maximaler rel. Fehler	<0.1%	<0.1%



Beispiel: Triebwerks Kreisprozess Vergleich mit/ohne gemischte Terme:



	Wirkungsgrad	Leistung
R^2	1	1
Maximaler rel. Fehler	<0.1%	<0.1%



Box-Cox-Transformation [6]

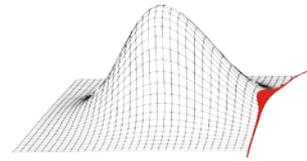
$$y = c_0 + \sum_{i=1}^{n_b} c_i b_i + \sum_{i=1}^{n_b} \sum_{j=1}^{n_b} c_{ij} b_i b_j + \varepsilon$$

Skalierung der y-Werte zur besseren Anpassbarkeit der Antwortfläche.

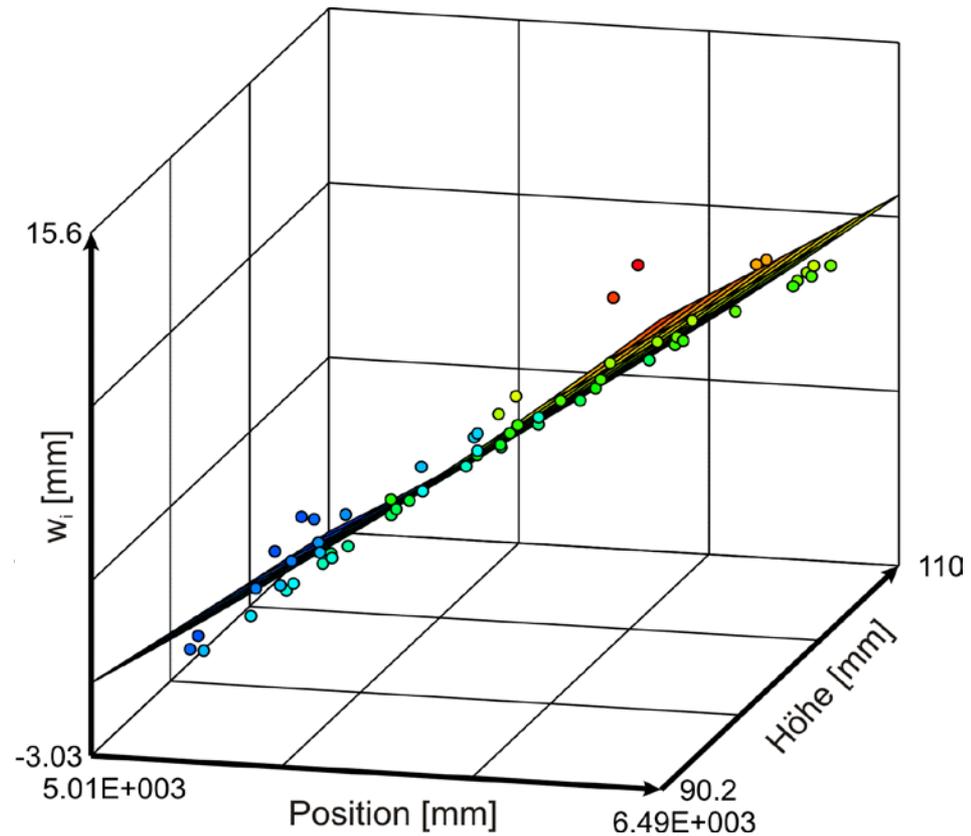
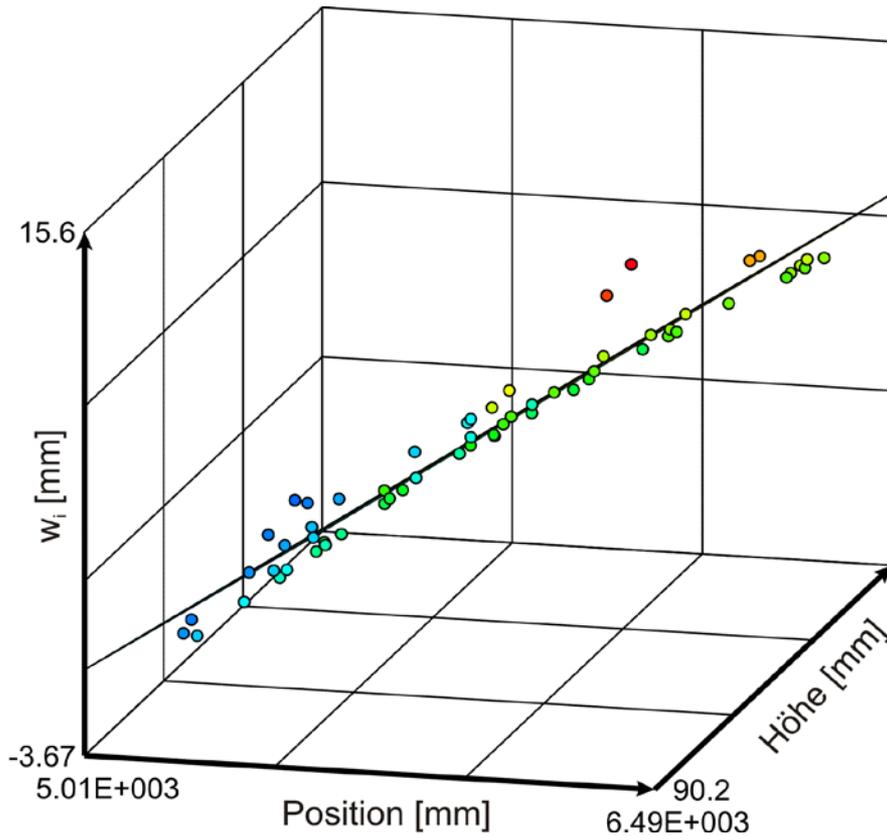
$$y^s = \bar{c}_0 + \sum_{k=1}^{n_b} \bar{c}_k b_k + \sum_{k=1}^{n_b} \sum_{m=1}^{n_b} \overline{c_{km}} b_k b_m + \bar{\varepsilon}$$

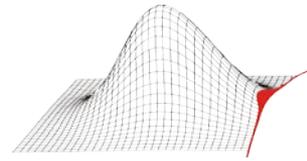
Variable s wird so gewählt, dass sich die Summe der Fehlerquadrate weiter reduziert.

$$s = [0,1 \dots 2,0]$$



Box-Cox-Transformation



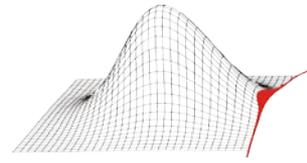


Antwortflächen sind mathematische Beschreibungen des Systemverhaltens. Sie können genutzt werden, um

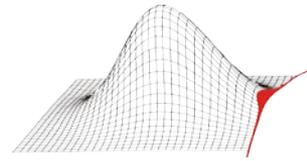
- Sensitivitäten zu detektieren (für $R^2 > 0,8$)
- Das deterministische Modell zu ersetzen

Das **Bestimmtheitsmaß** beschreibt die Güte der Antwortfläche, liefert jedoch keine Informationen

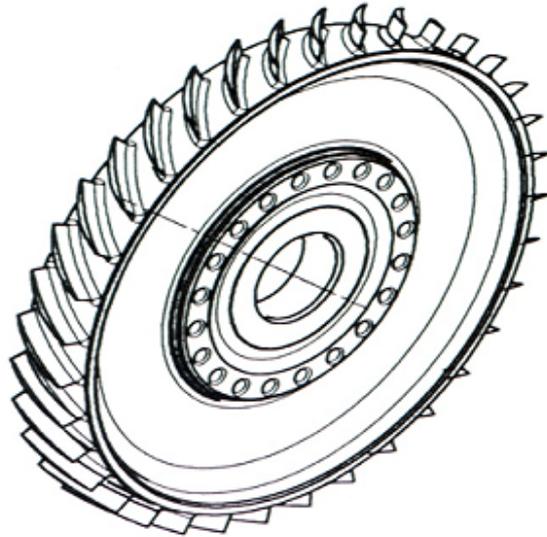
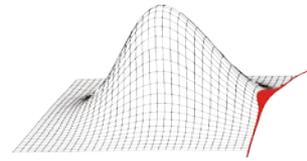
- über den maximalen Fehler
- Zum Approximationsfehler zwischen den Stützstellen



- Einleitung
- Theoretische Grundlagen der Statistik
- Regression
- **Probabilistische Systemanalyse mit MCS**

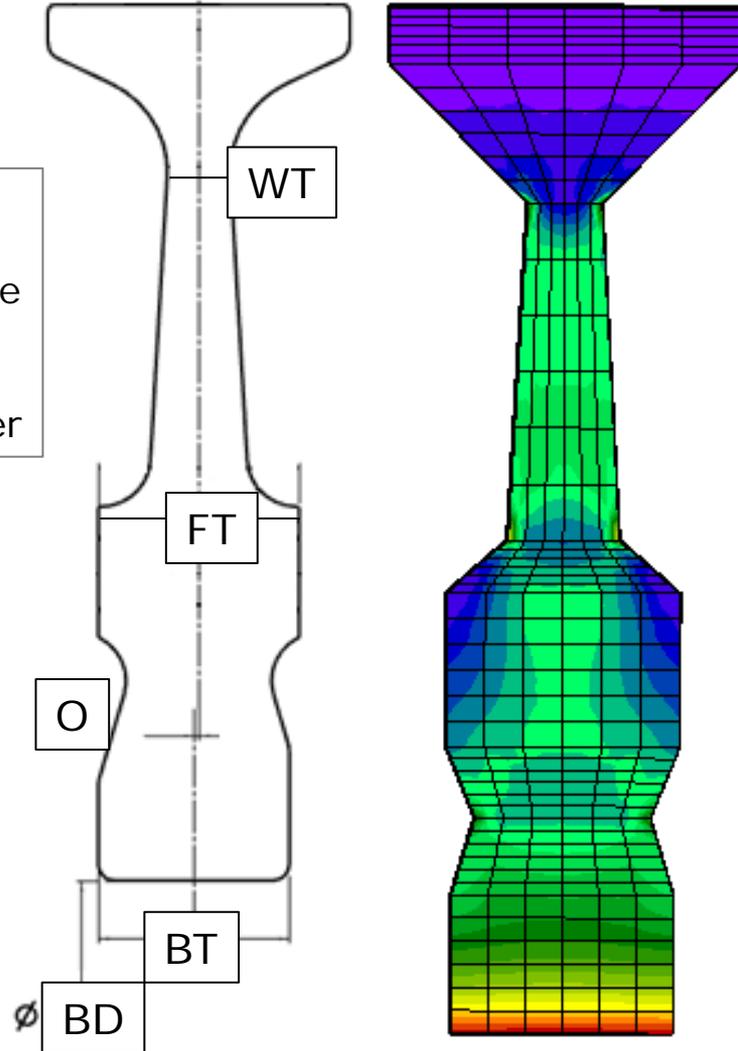


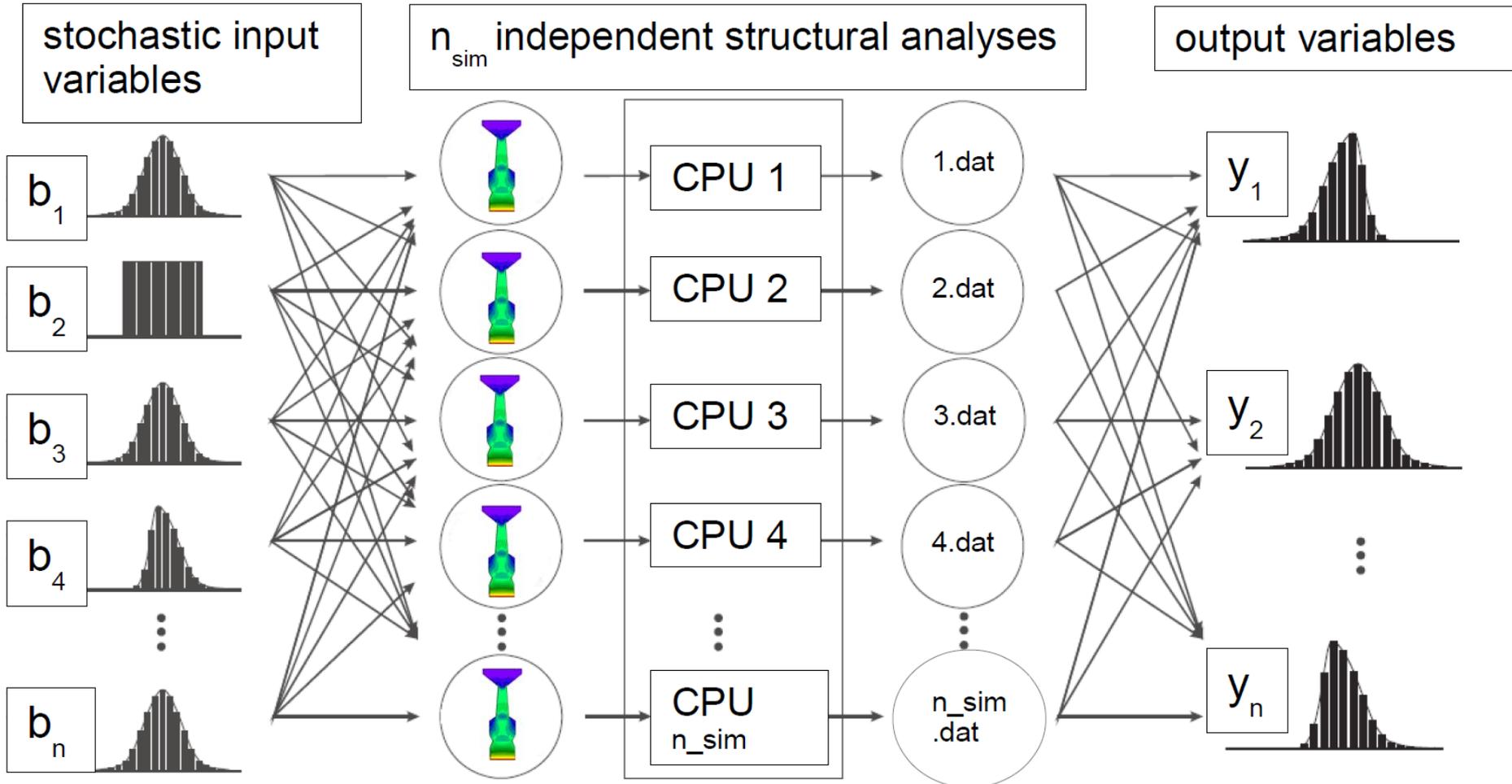
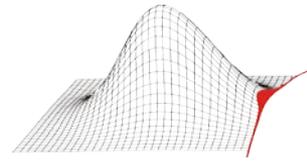
1. Möglichkeiten einer MCS mit optimierten Latin Hypercube Sampling
 1. Anwendungsbeispiel Rotorscheibe
 1. det. Modell / prob. Modell
 2. Monte Carlo Simulation, was ist möglich
 1. Eintretens-/Ausfallwahrscheinlichkeit, Häufigkeiten
 2. Sensitivitäten
 1. Korrelationen
 2. COI
 3. Robustheit eines Systems
 4. Potentielle System Verbesserung Mittelwert und Varianz

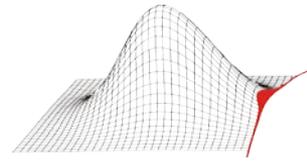


- Webbreite
- Flanschbreite
- Verschiebung Nabe – Web
- Nabenbreite
- Nabendurchmesser

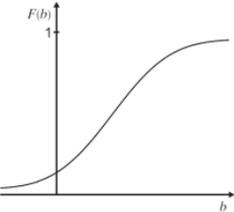
- strukturmechanische Problemstellung, FEM Analyse
- Eingangsparemeter: exemplarisch geometrische Parameter
- Ergebnisparameter: von Mises Spannung

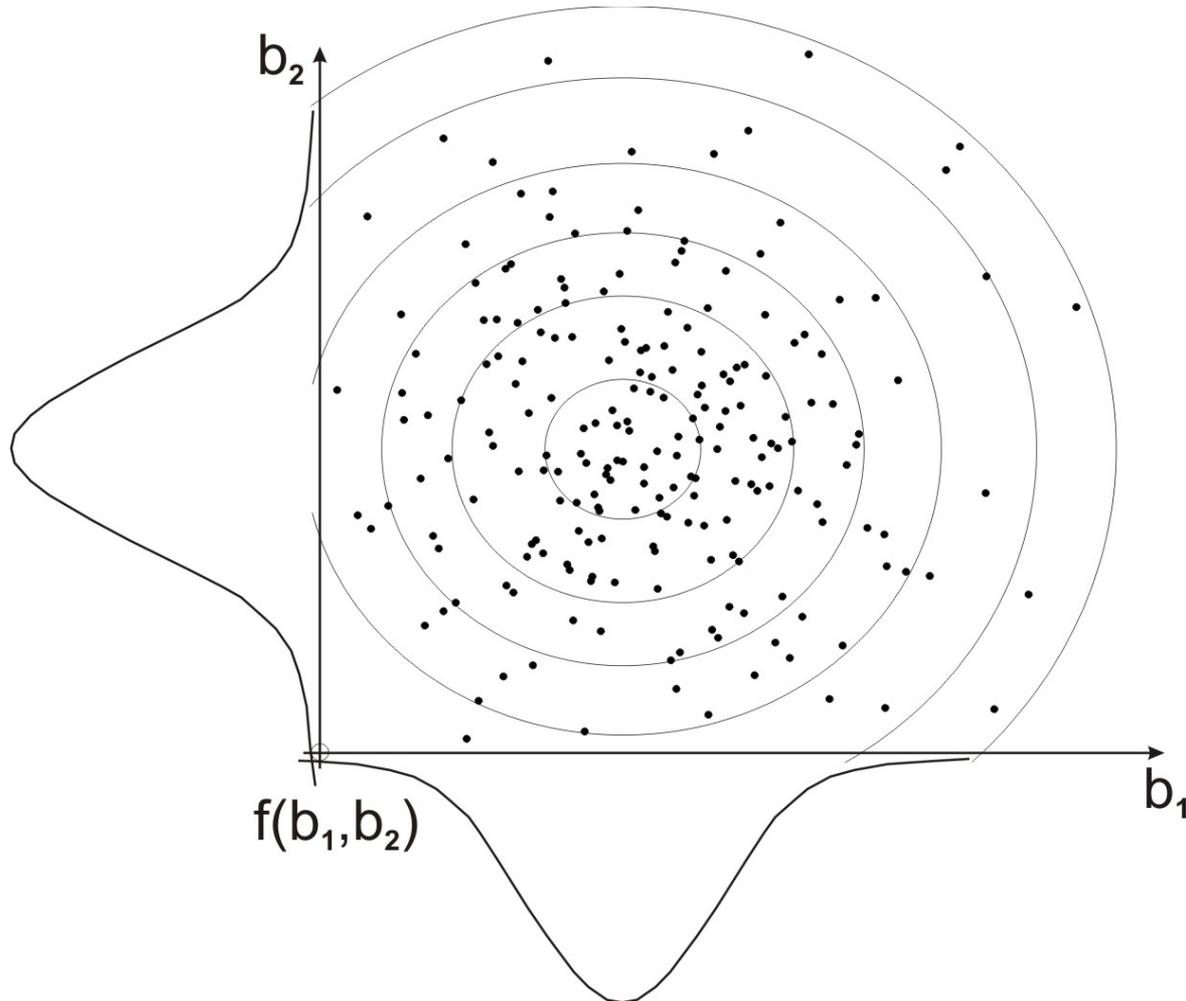
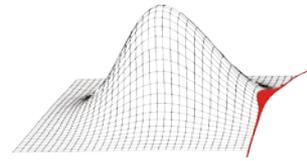


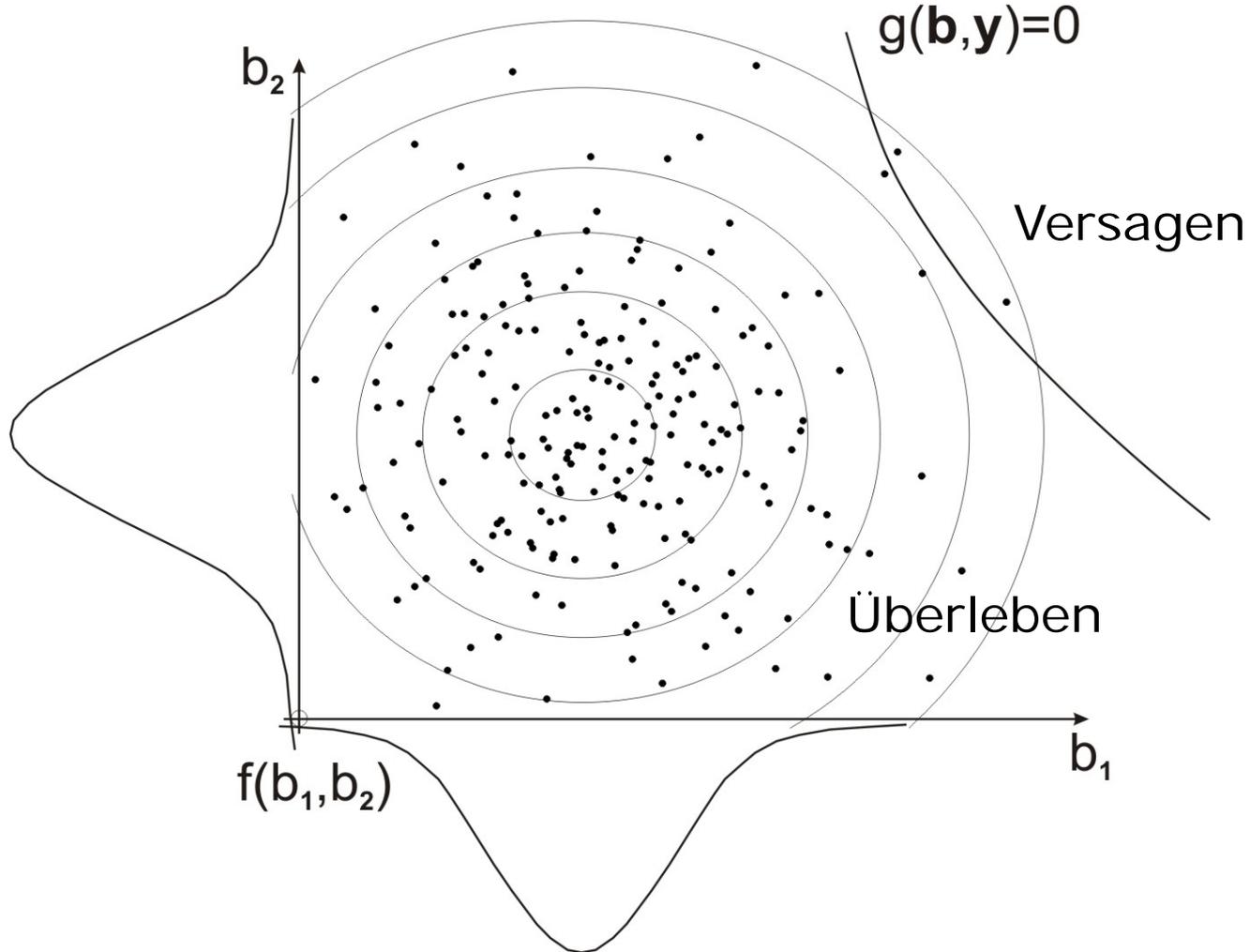
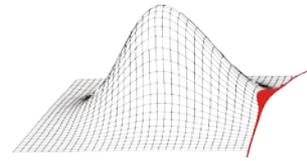


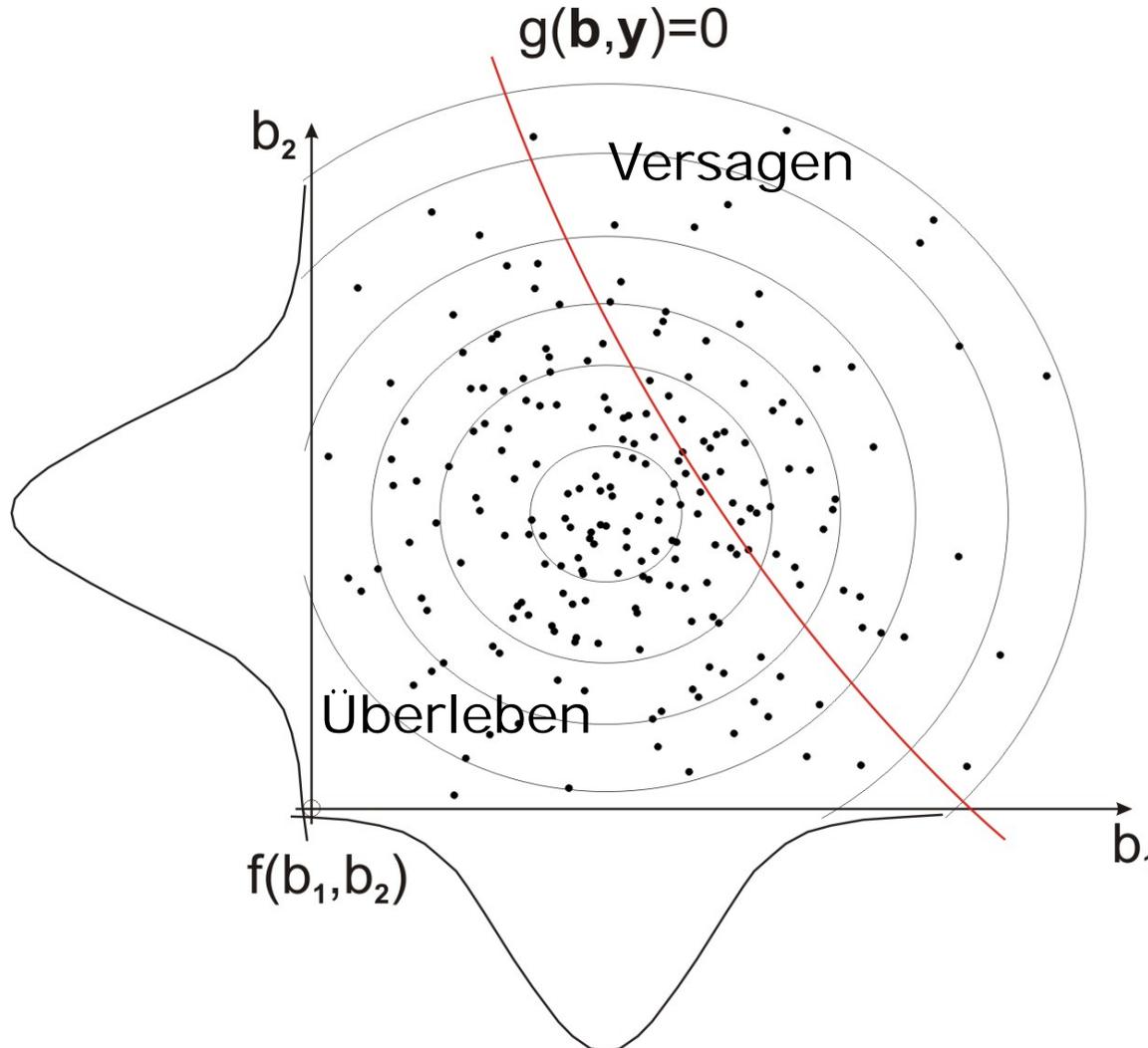
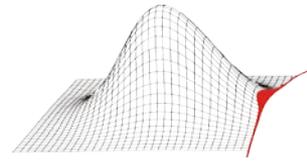


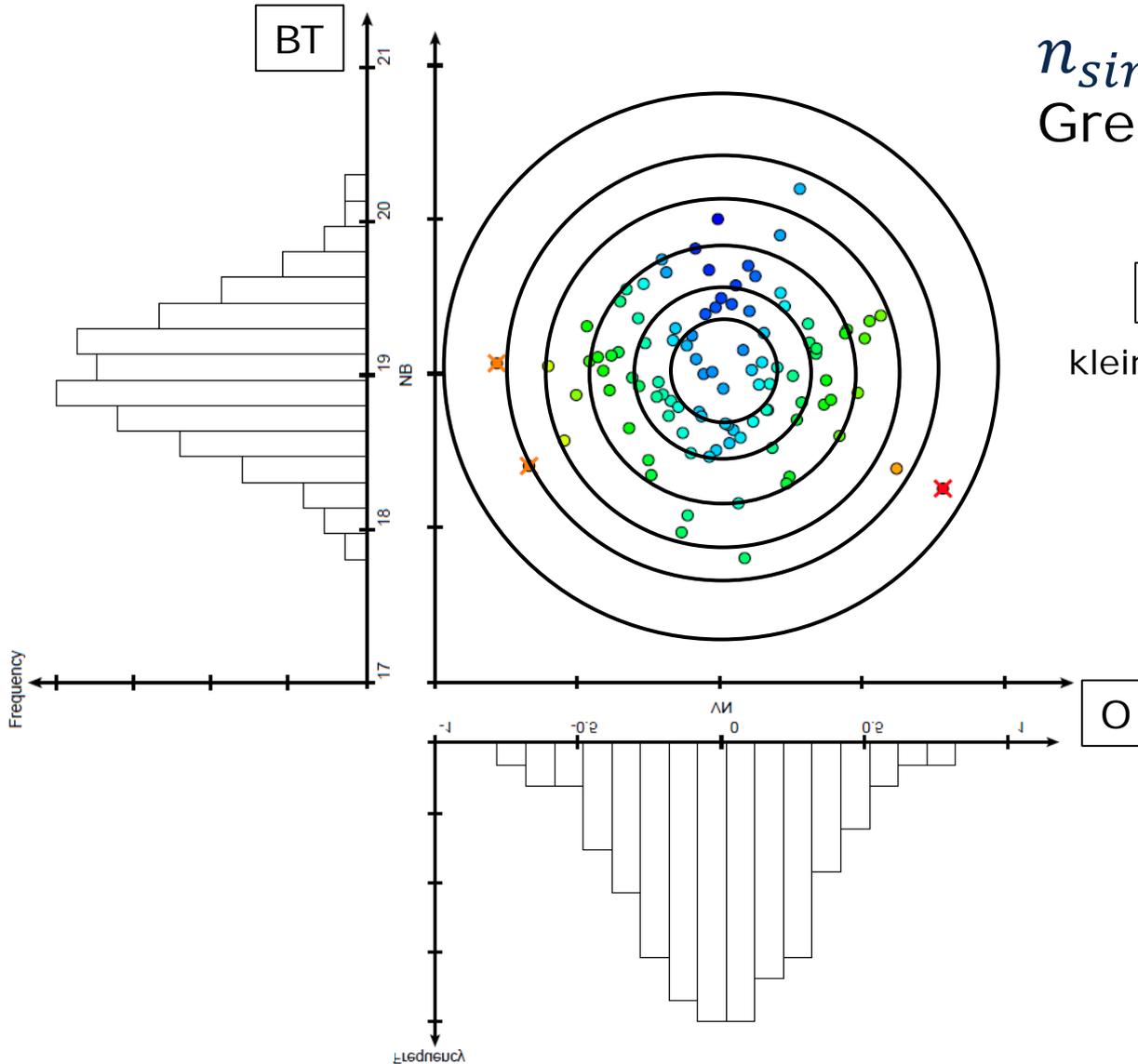
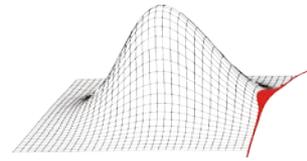
Anwendung der Monte-Carlo Methoden für probabilistische Untersuchungen unter Verwendung eines optimierten Latin-Hypercube-Samplings.

Ergebnisse der prob. Simulation	Ausfallwahrscheinlichkeiten
Dichtefunktion der Eingangsgrößen - geschätzt (Industriestandard)	
- genau bekannt	
Benötigte Anzahl an det. Rechnungen	$P_f \approx \frac{10}{n_{sim}}$
Ergebnisse Eine einzige MCS liefert für alle Ergebnisgrößen:	







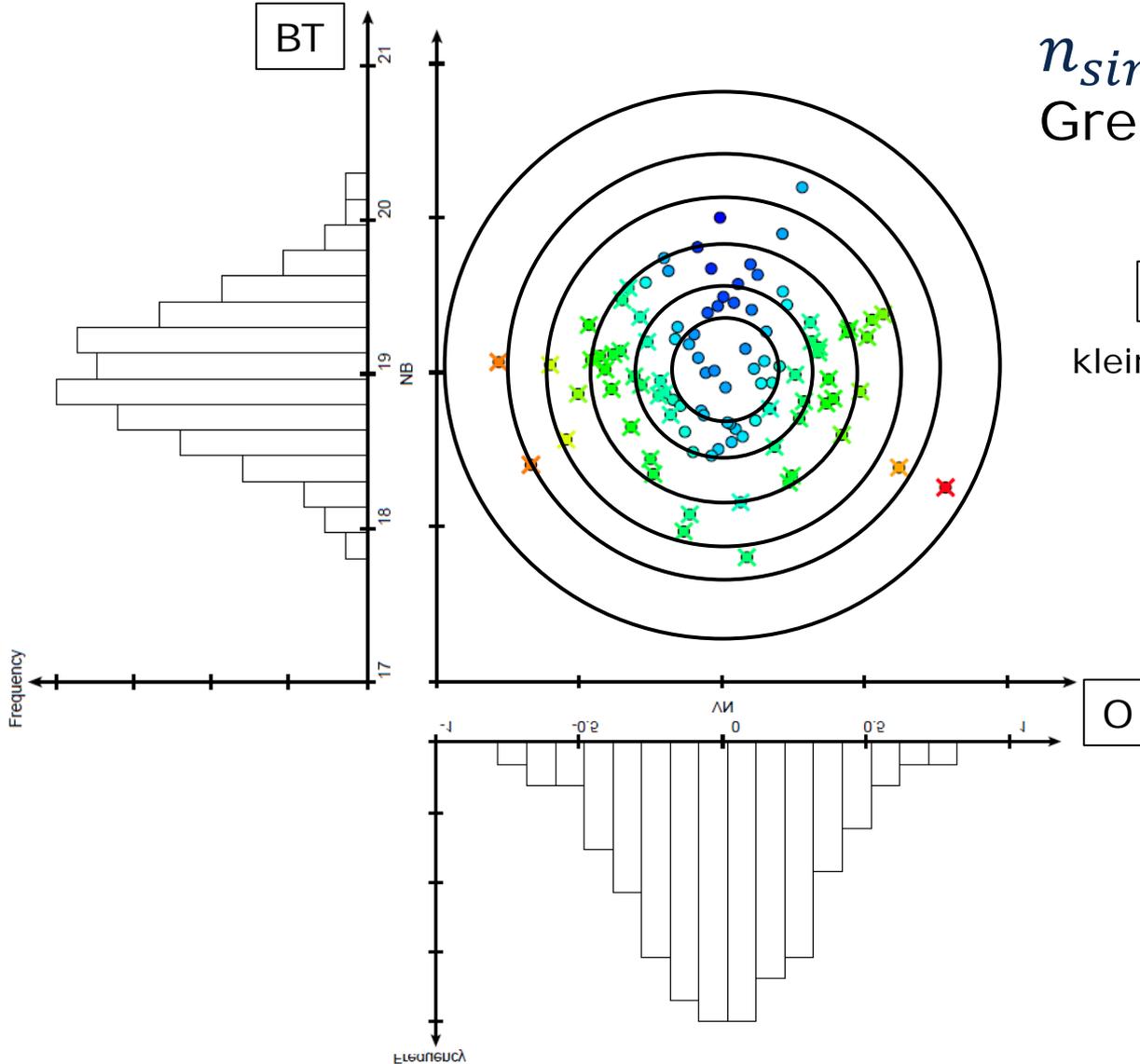
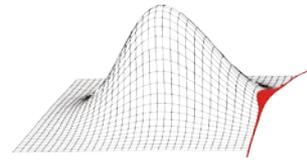


$n_{sim} = 100$
Grenze = 770 MPa

Max von Mises Spannung

klein  hoch

Simulation 3

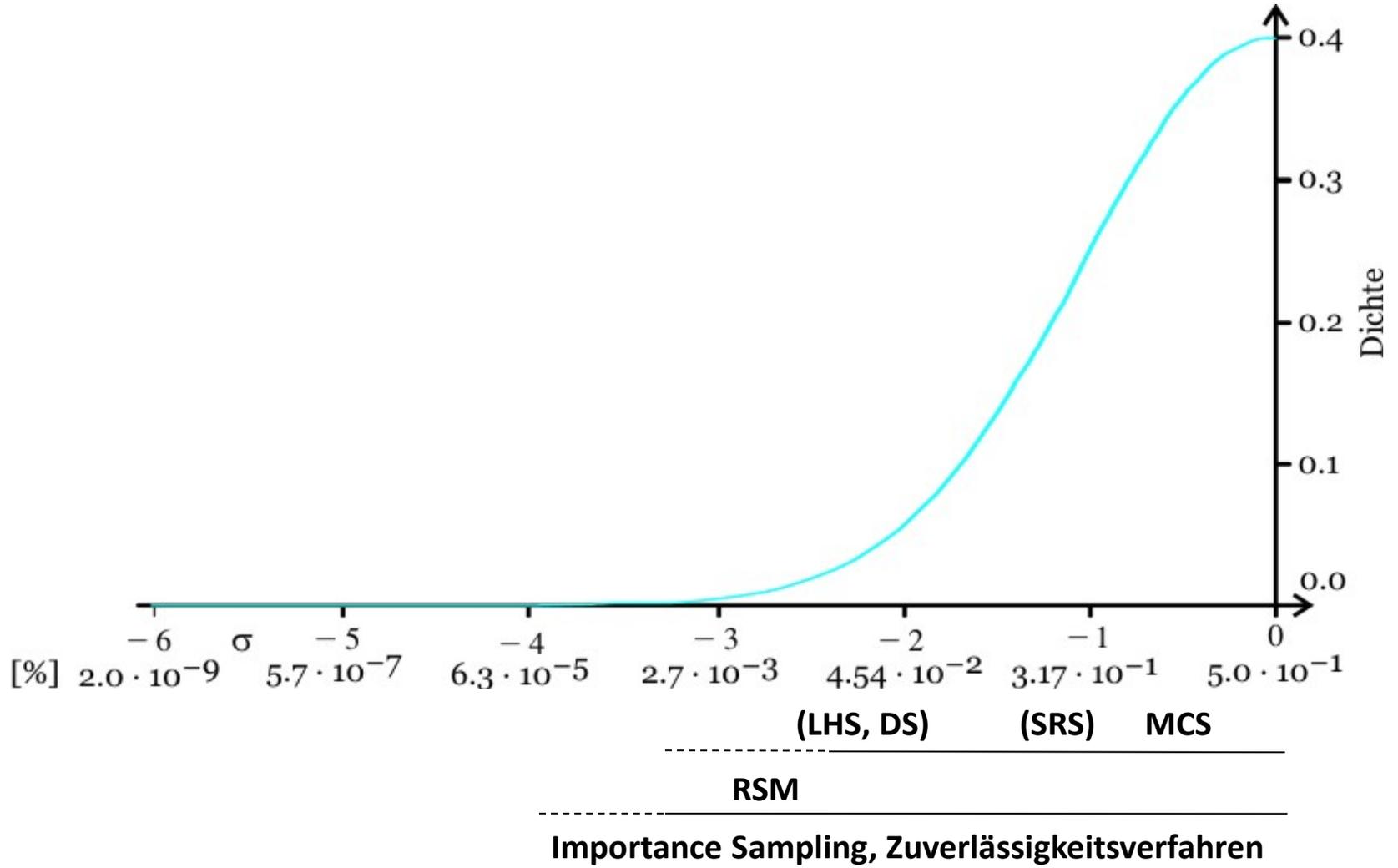
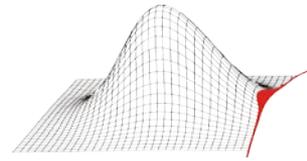


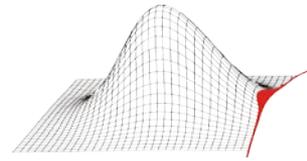
$n_{sim} = 100$
Grenze = 710 MPa

Max von Mises Spannung

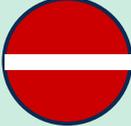
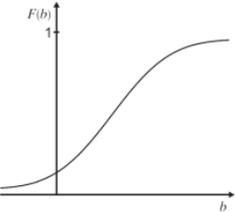
klein  hoch

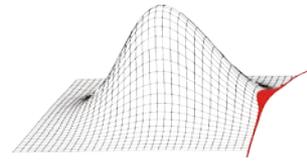
Simulation 3



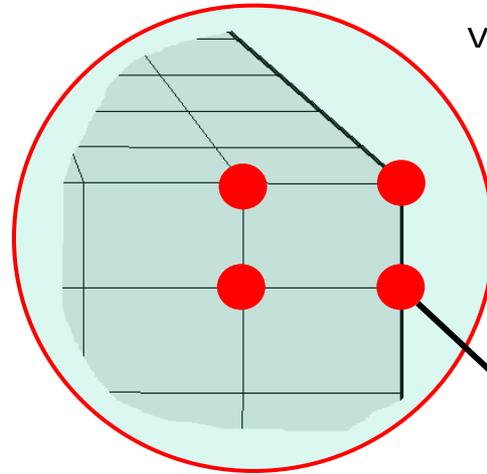
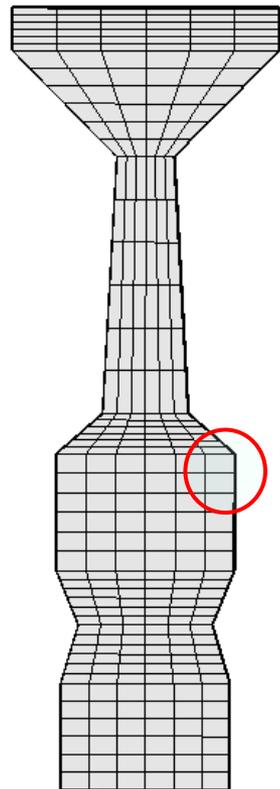


Anwendung der Monte-Carlo Methoden für probabilistische Untersuchungen unter Verwendung eines optimierten Latin-Hypercube-Samplings.

Ergebnisse der prob. Simulation	Ausfallwahrscheinlichkeiten	Detektion von kritischen Orten
Dichtefunktion der Eingangsgrößen - geschätzt (Industriestandard)		
- genau bekannt		
Benötigte Anzahl an det. Rechnungen	$P_f \approx \frac{10}{n_{sim}}$	
Ergebnisse Eine einzige MCS liefert für alle Ergebnisgrößen:		



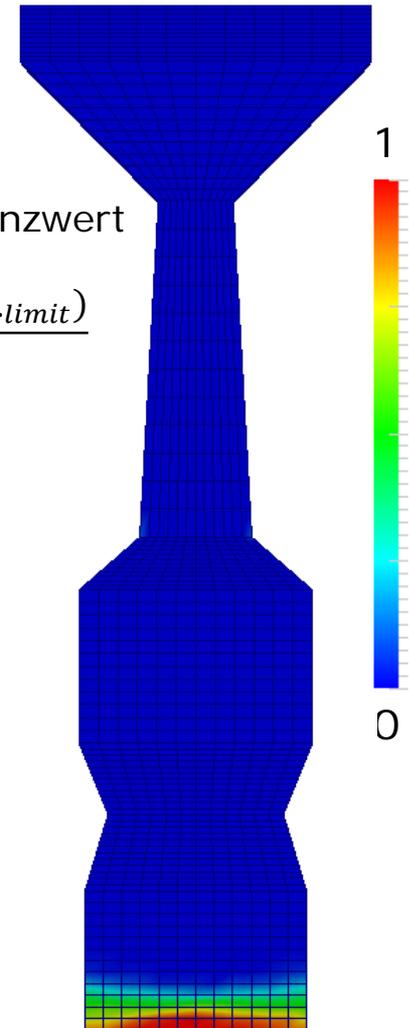
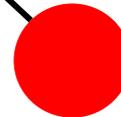
- Globale Statistik für CFD, FEM Simulationen
 - Darstellen der statistischen Werte auf eine Basis Diskretisierung

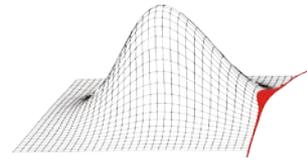


Relative Häufigkeit
von Mises Spannung < Grenzwert

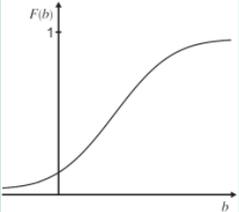
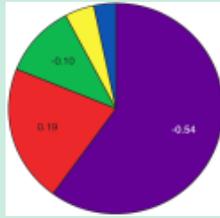
$$h = \frac{(n_{count < limit}) \text{ or } (n_{count > limit})}{n_{sim}}$$

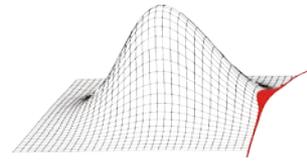
- Anwendung von Statistik auf n_{sim} Ergebniswerte pro Knoten für das gesamte Bauteil





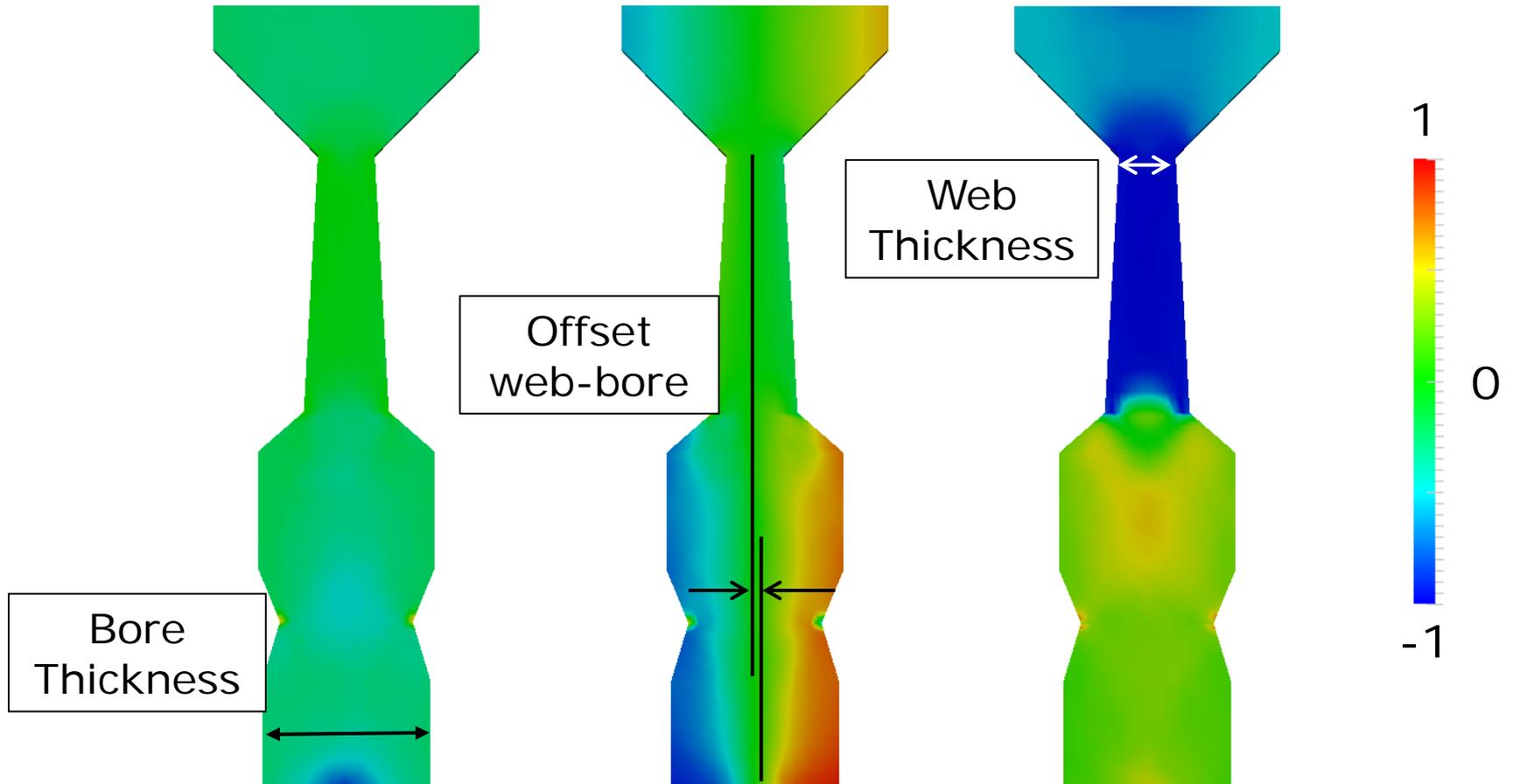
Anwendung der Monte-Carlo Methoden für probabilistische Untersuchungen unter Verwendung eines optimierten Latin-Hypercube-Samplings.

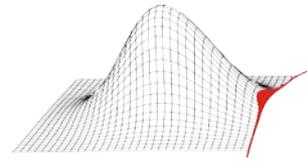
Ergebnisse der prob. Simulation	Ausfallwahrscheinlichkeiten	Detektion von kritischen Orten	Sensitivitäten
Dichtefunktion der Eingangsgrößen - geschätzt (Industriestandard)			
- genau bekannt			
Benötigte Anzahl an det. Rechnungen	$P_f \approx \frac{10}{n_{sim}}$		
Ergebnisse Eine einzige MCS liefert für alle Ergebnisgrößen:			



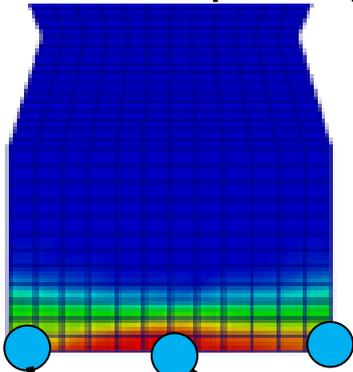
Globale Bewertung anhand des Rangkorrelationskoeffizienten \tilde{r}

von Mises stress vs.

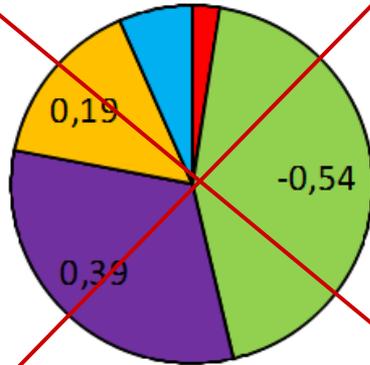




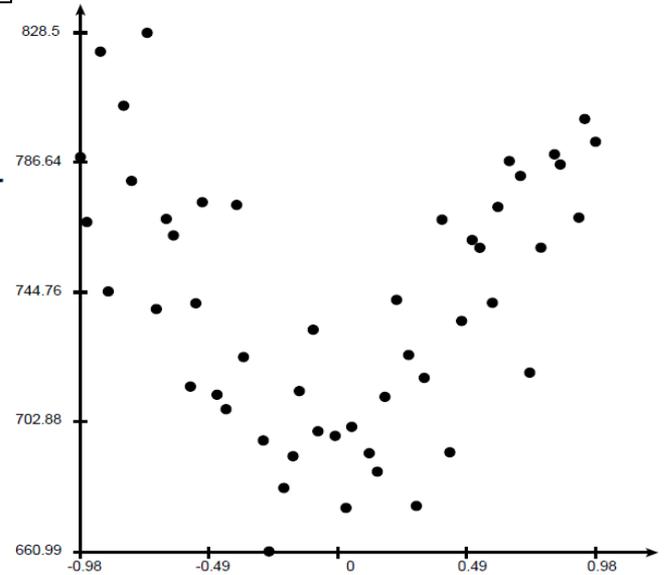
relative frequency



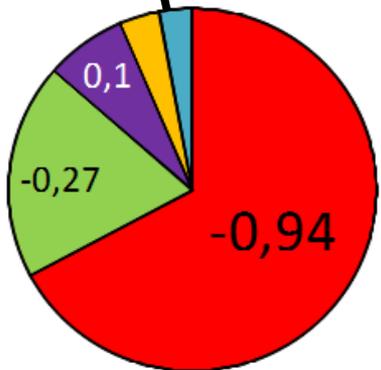
max von Mises Spannung



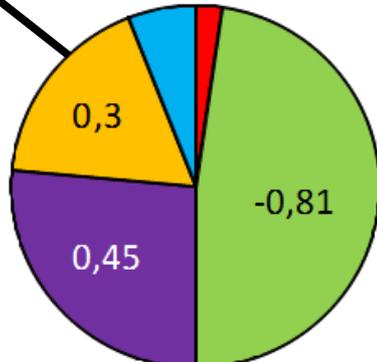
- O
- BT
- WT
- BD
- FT



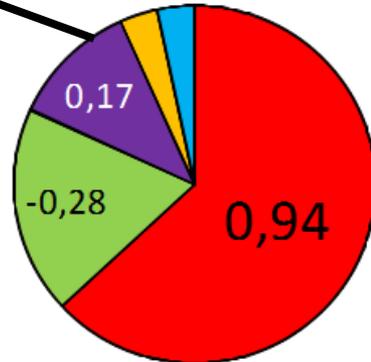
O



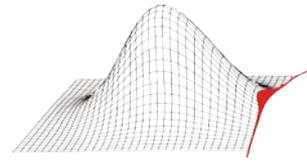
- O
- BT
- WT
- BD
- FT



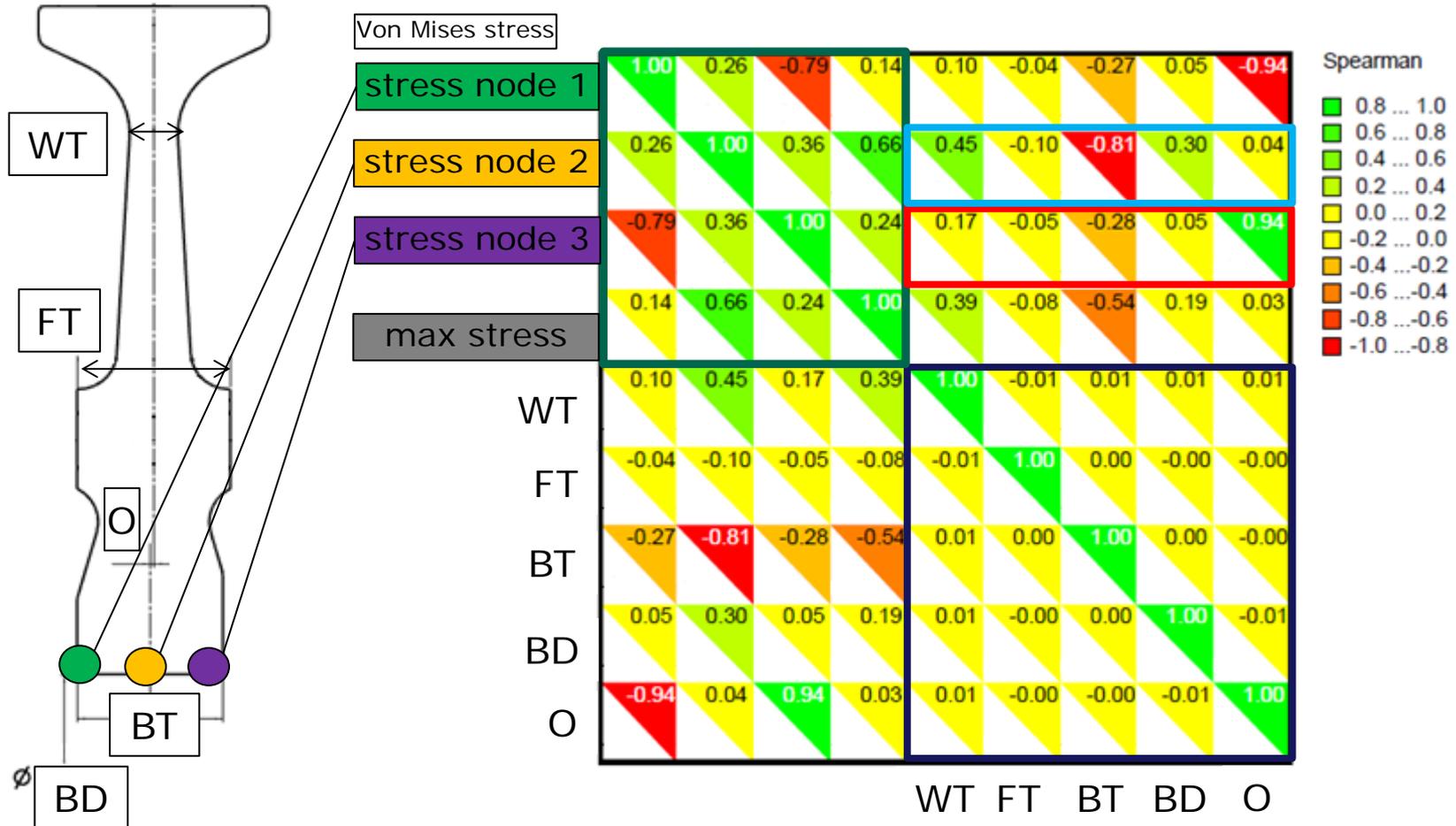
- O
- BT
- WT
- BD
- FT

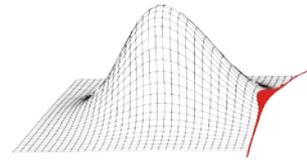


- O
- BT
- WT
- BD
- FT



Lokale Bewertung anhand des Rangkorrelationskoeffizienten \tilde{r}



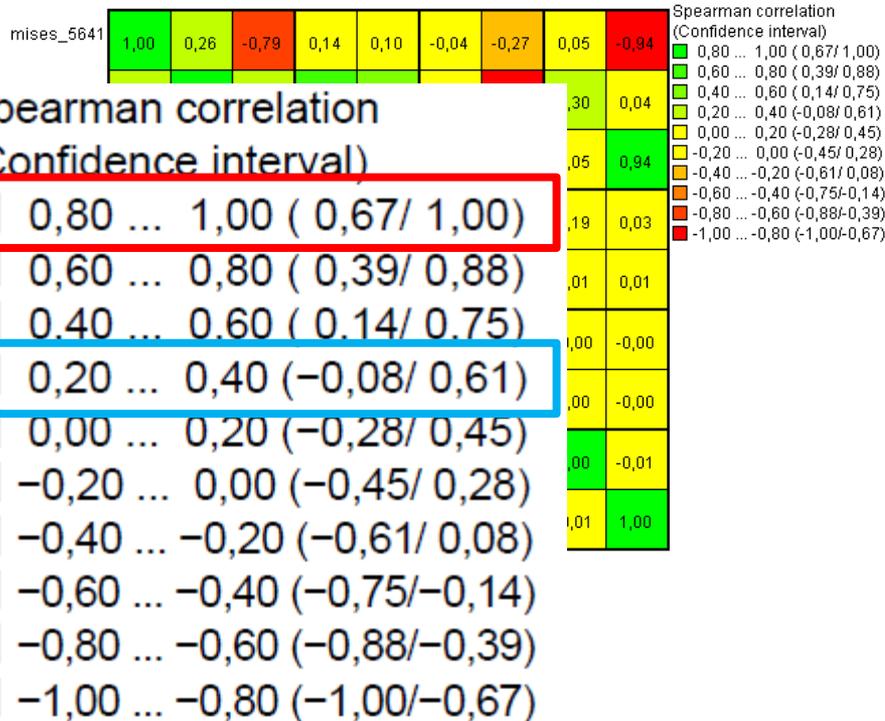


Bewertung des Rangkorrelationskoeffizient anhand des Konfidenzintervalls

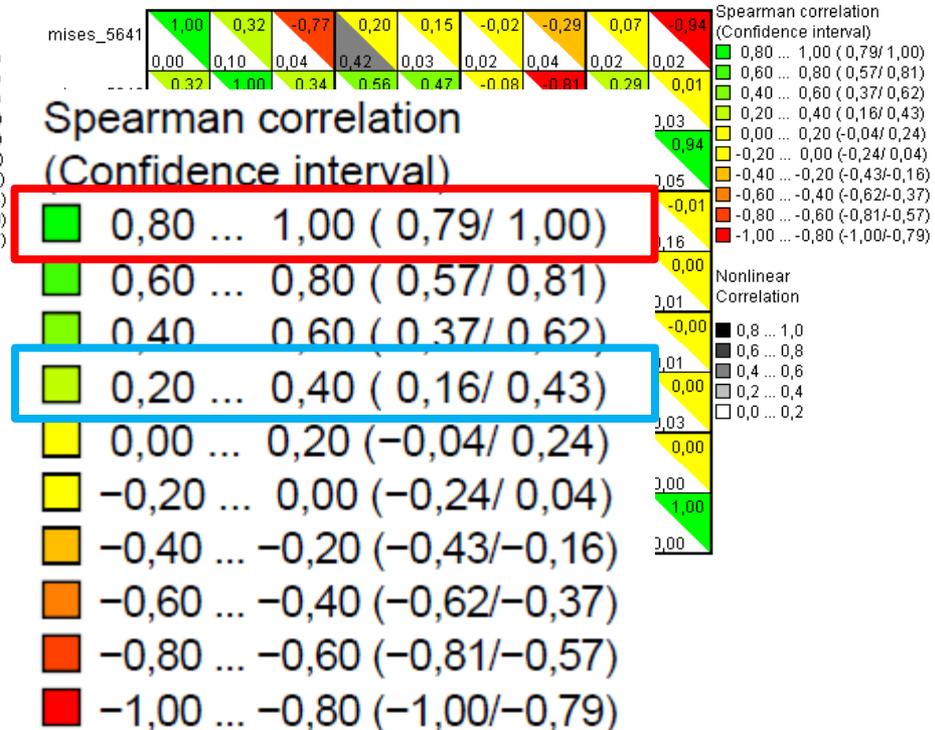
$$n_{sim} = 50$$

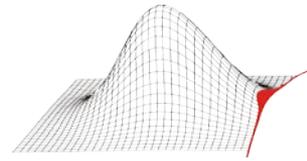
$$n_{sim} = 2500$$

Correlation-Matrix

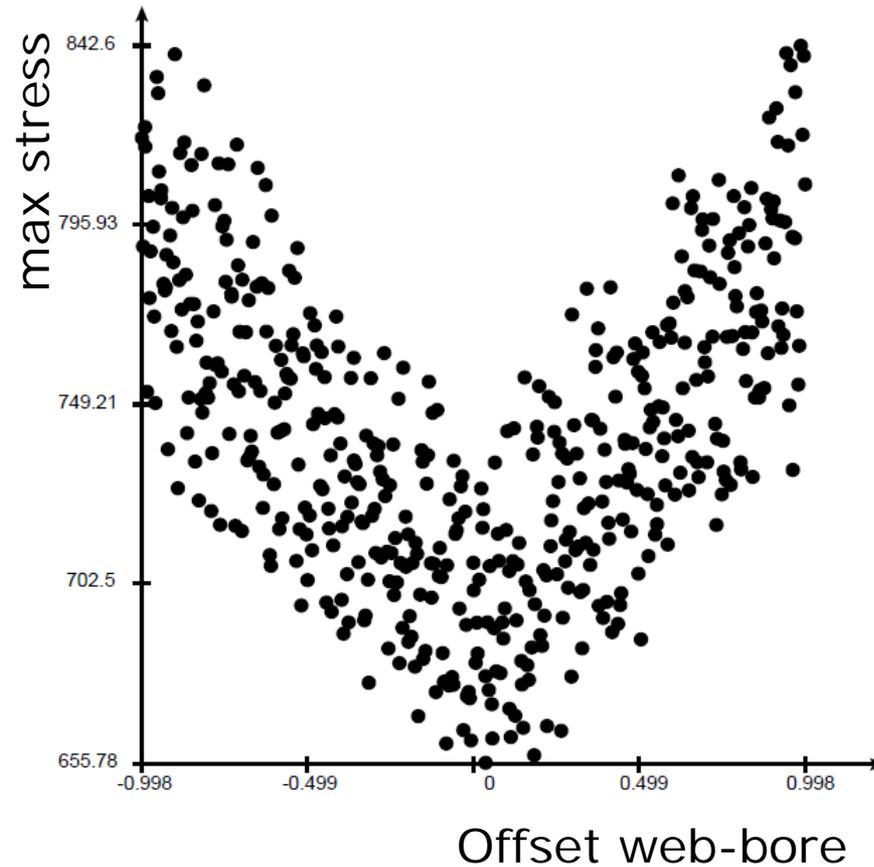
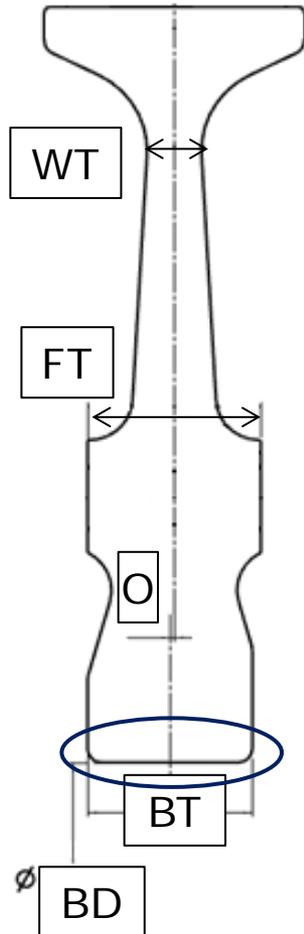


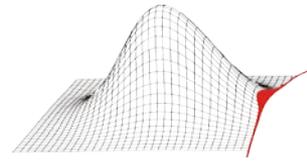
Correlation-Matrix



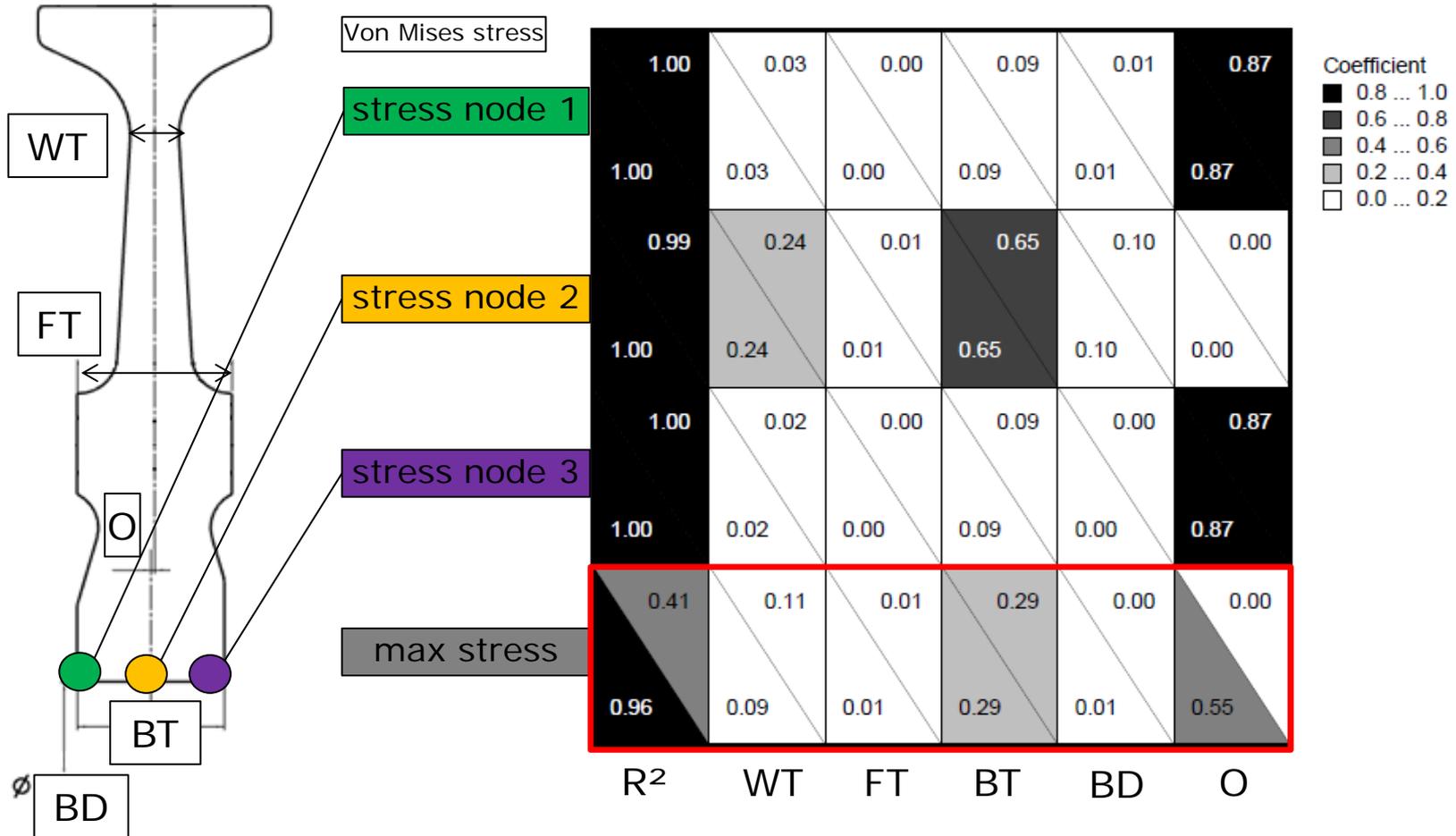


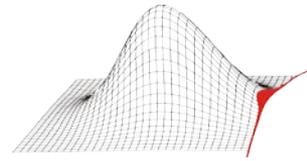
Lokale Bewertung von nichtlinearen und nichtmonotonen Verhalten



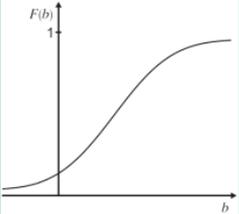
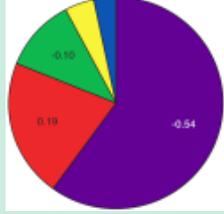
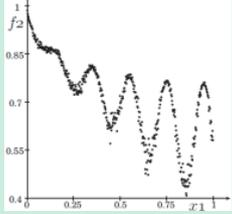


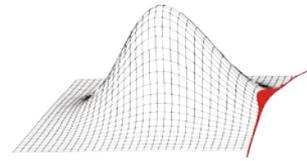
Lokale Bewertung anhand des Coefficient of Importance (CoI)





Anwendung der Monte-Carlo Methoden für probabilistische Untersuchungen unter Verwendung eines optimierten Latin-Hypercube-Samplings.

Ergebnisse der prob. Simulation	Ausfallwahrscheinlichkeiten	Detektion von kritischen Orten	Sensitivitäten	Robustheit
Dichtefunktion der Eingangsgrößen - geschätzt (Industriestandard)				
- genau bekannt				
Benötigte Anzahl an det. Rechnungen	$P_f \approx \frac{10}{n_{sim}}$			
Ergebnisse Eine einzige MCS liefert für alle Ergebnisgrößen:				



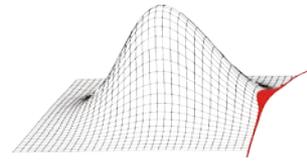
Was ist robustes Design?

Ingenieurmäßige Maße	Statistische Maße
<ul style="list-style-type: none"> - Überschreiten von Grenzwerten - Auftreten von unerwünschten plötzlichen Änderungen der Ergebnisgrößen (z.B. lokales Maximum der Ergebnisgröße) - Ansprechen von Systeminstabilitäten (z.B.: Beulen) 	<ul style="list-style-type: none"> - Lage der Mittelwerte der Ergebnisgrößen - Größe der Variationskoeffizienten der Ergebnisgrößen

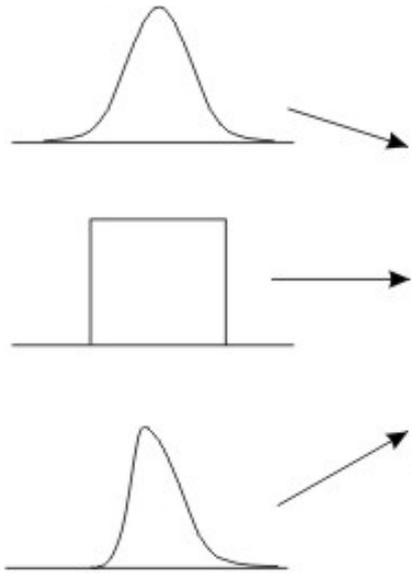
[9]

Notwendige Anzahl an Rechnung bei MCS:

- Abhängig von der Wahrscheinlichkeit des Ereignisses
- Lage der Mittelwerte der Ergebnisgrößen: $\approx 30 \dots 50$
- Größe der Variationskoeffizienten der Ergebnisgrößen: $\approx 50 \dots 100$

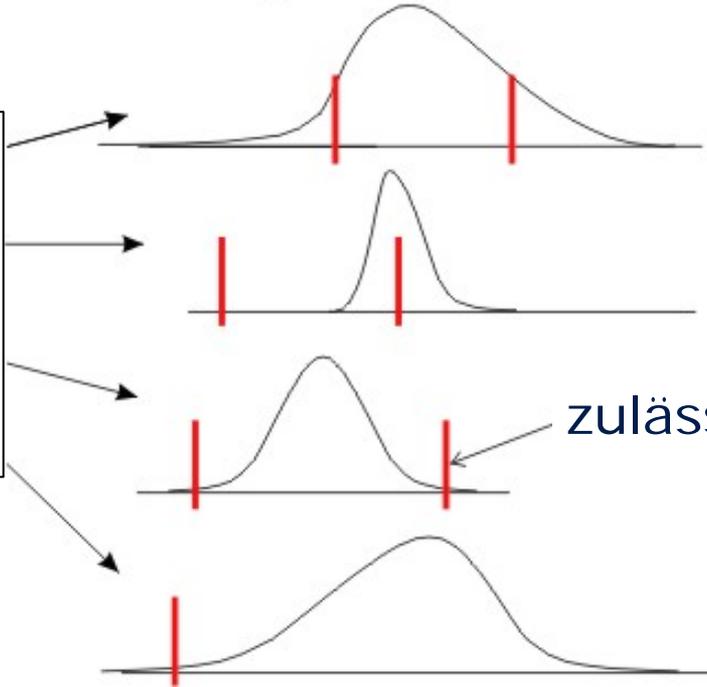


Eingangsgrößen

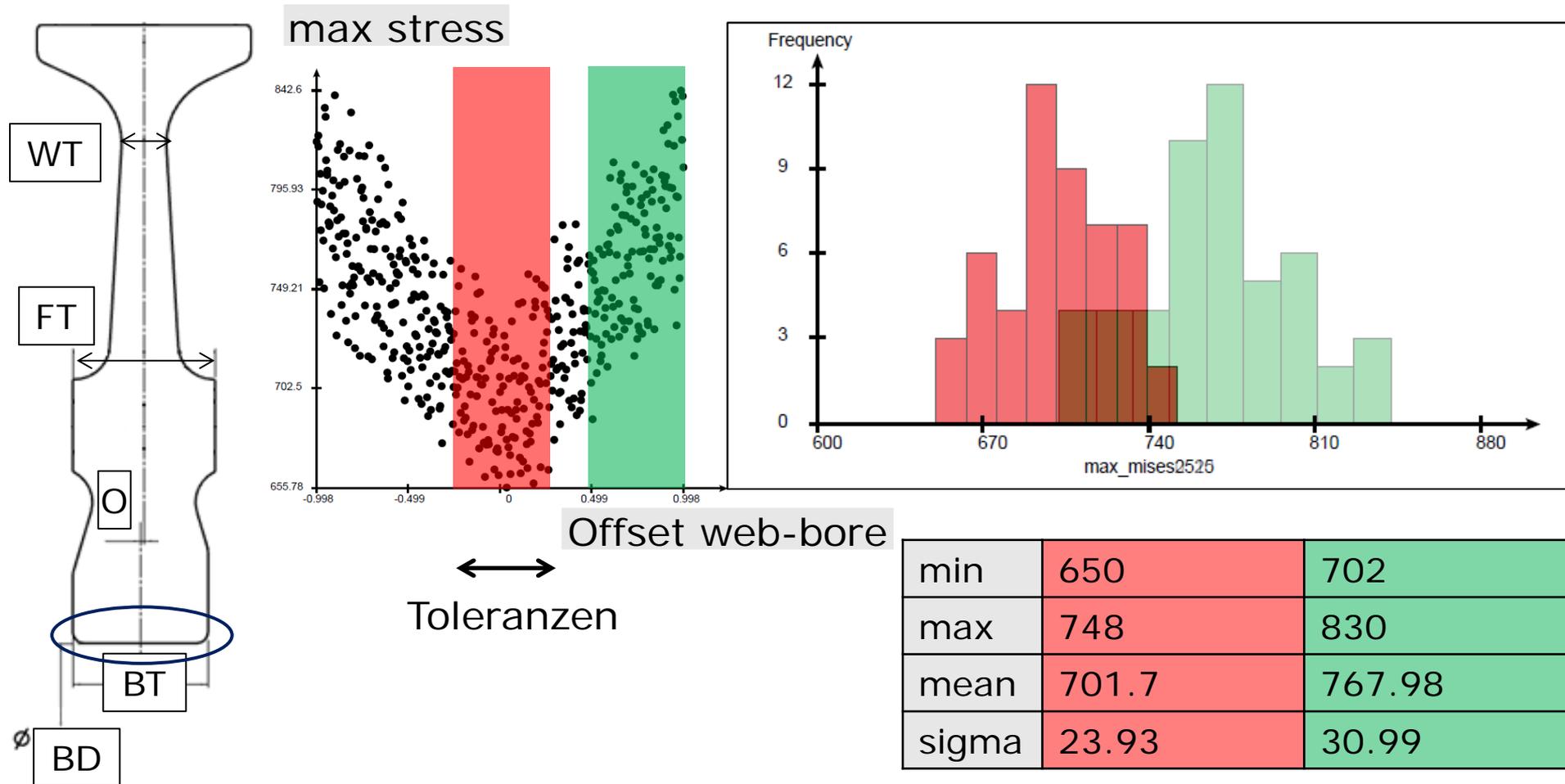
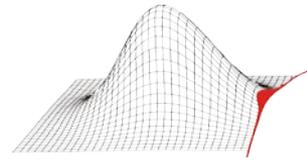


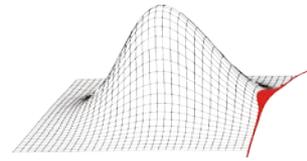
determinis-
tisches
Modell

Ergebnisgrößen

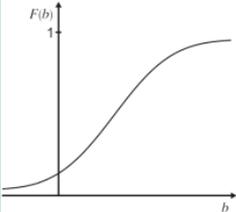
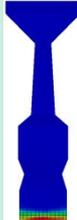
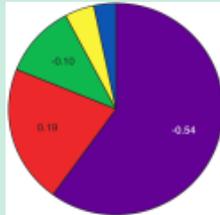
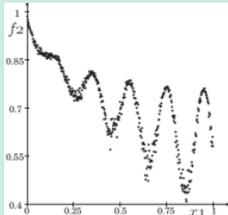
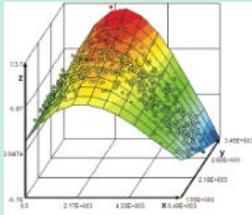


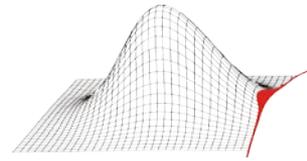
zulässige Streubreite



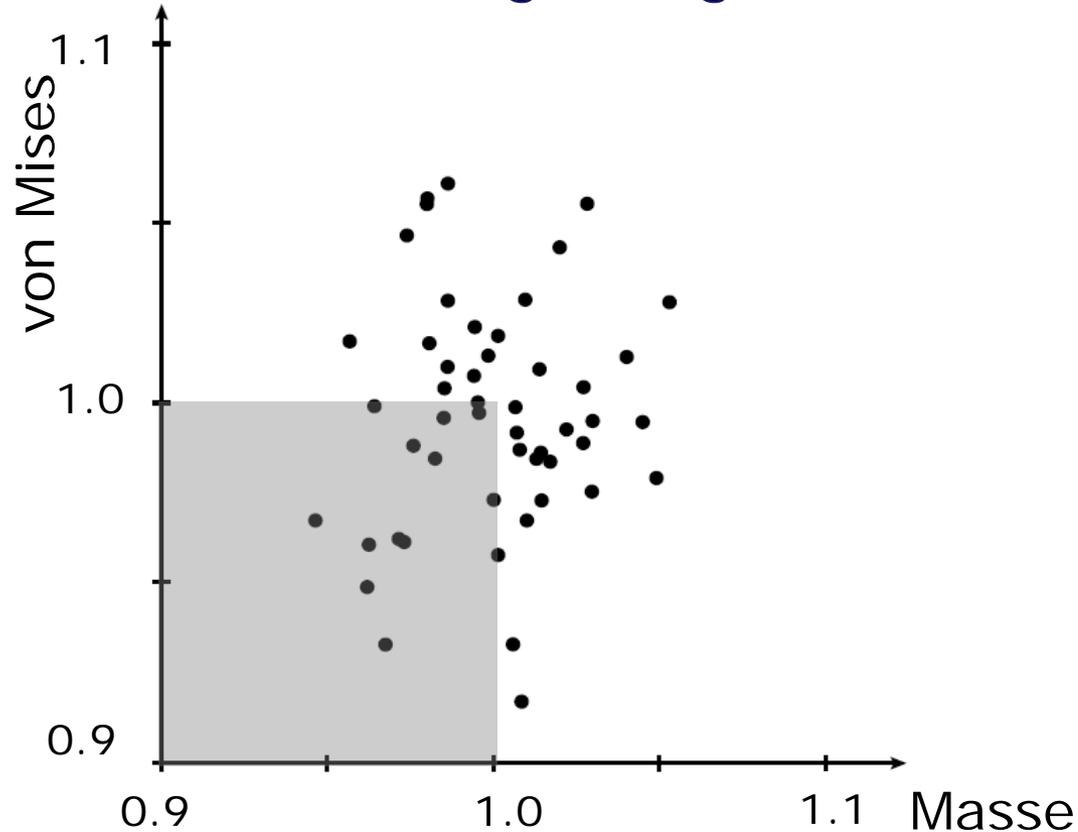
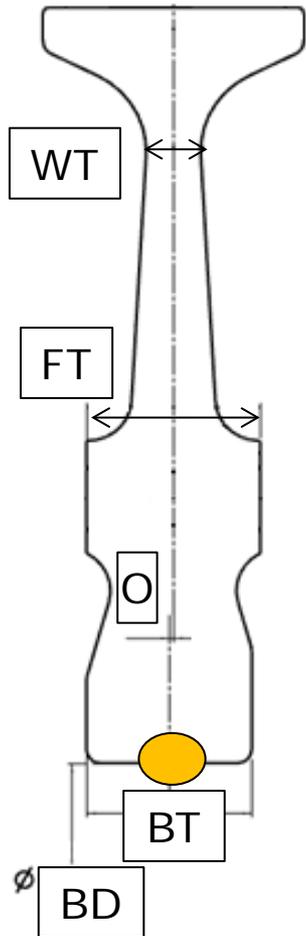


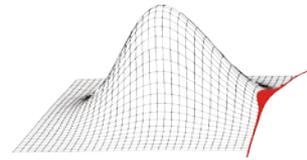
Anwendung der Monte-Carlo Methoden für probabilistische Untersuchungen unter Verwendung eines optimierten Latin-Hypercube-Samplings.

Ergebnisse der prob. Simulation	Ausfallwahrscheinlichkeiten	Detektion von kritischen Orten	Sensitivitäten	Robustheit	System Verbesserung
Dichtefunktion der Eingangsgrößen - geschätzt (Industriestandard)					
- genau bekannt					
Benötigte Anzahl an det. Rechnungen	$P_f \approx \frac{10}{n_{sim}}$				
Ergebnisse Eine einzige MCS liefert für alle Ergebnisgrößen:					

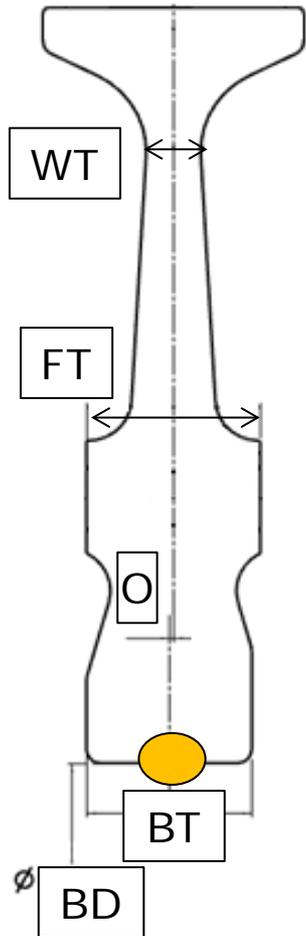


- Verwendung des besten Samples aus der MCS, hinsichtlich der Ergebnisgrößen

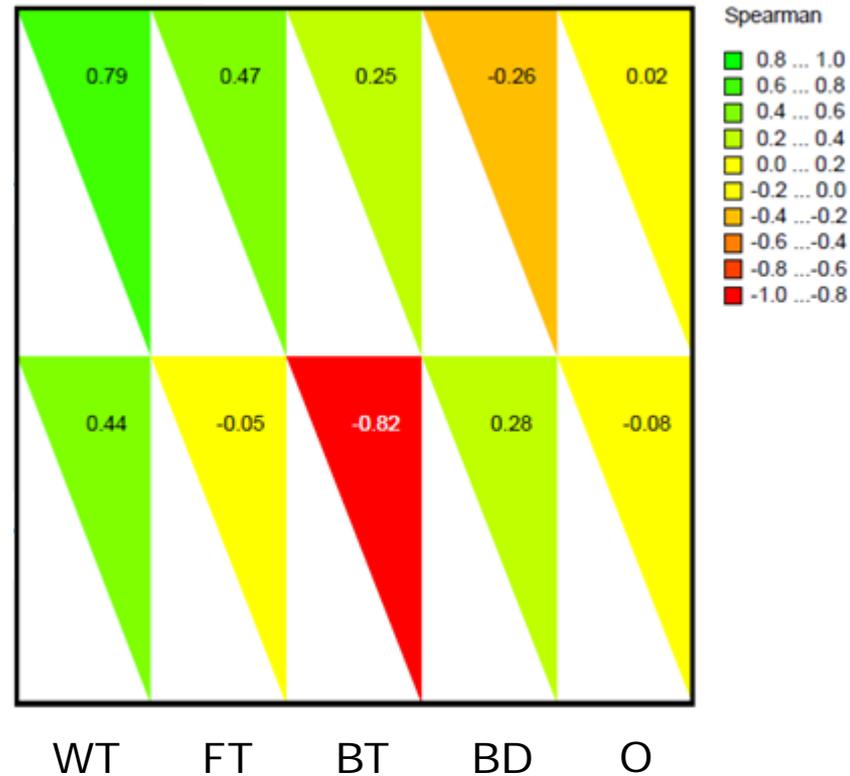


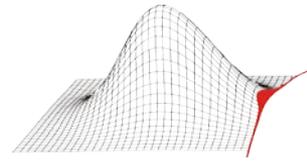


- Verwendung des Systemverhaltens bzw. der Sensitivitäten

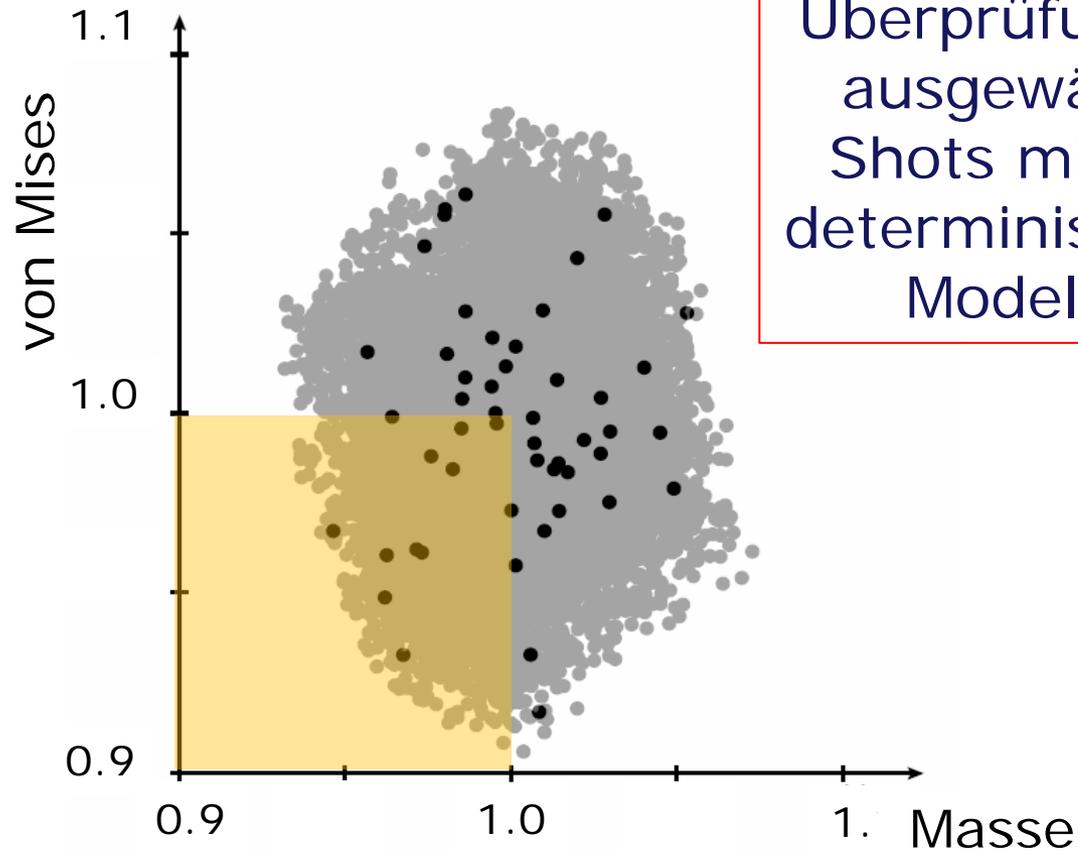
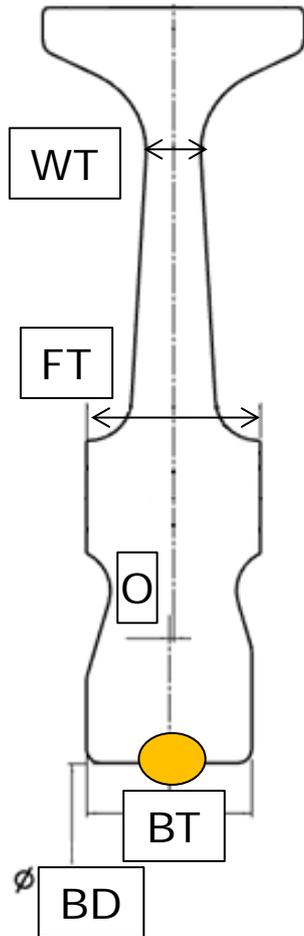


Masse
von Mises

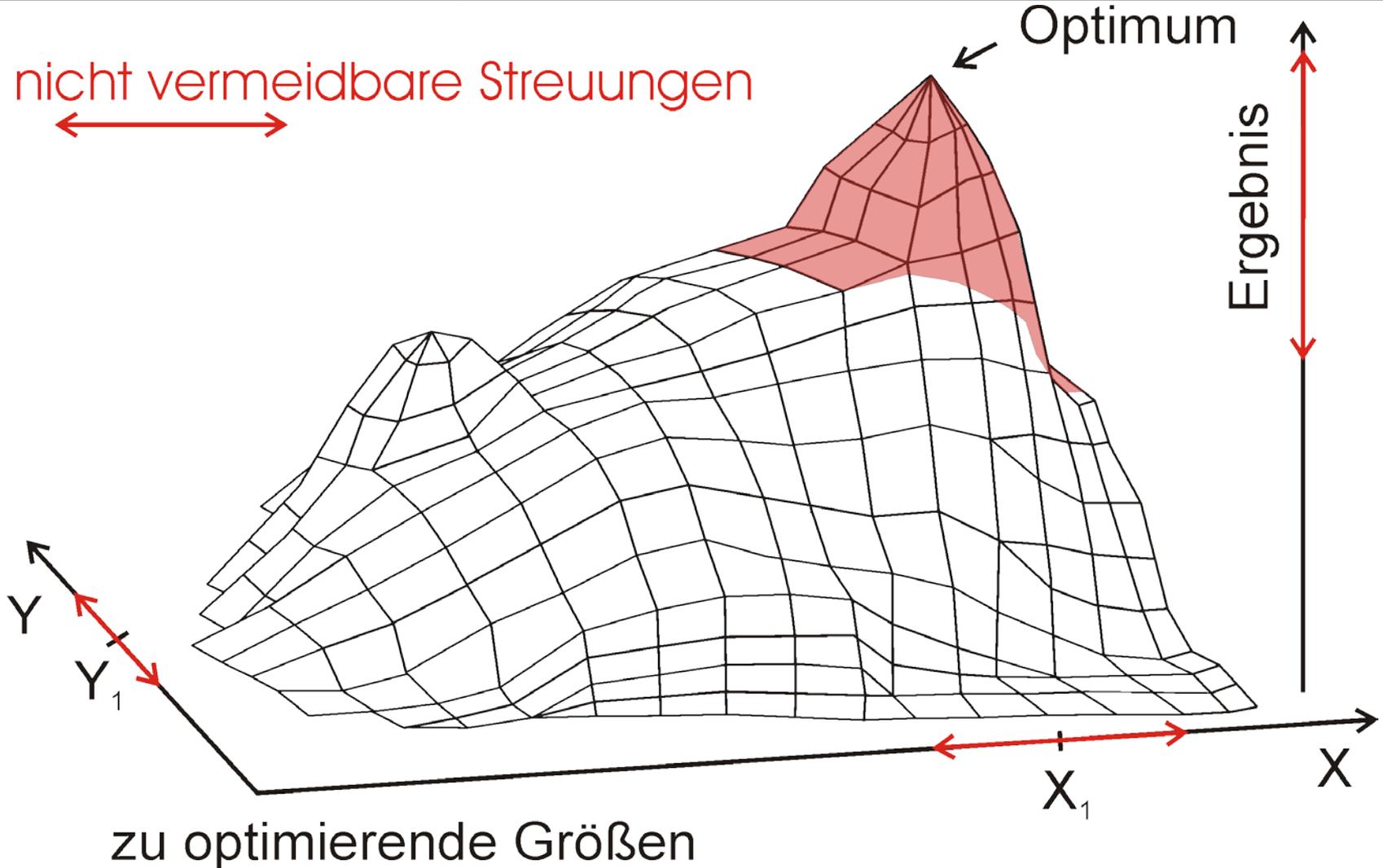
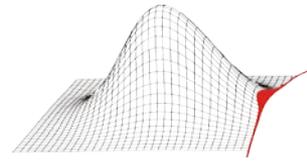


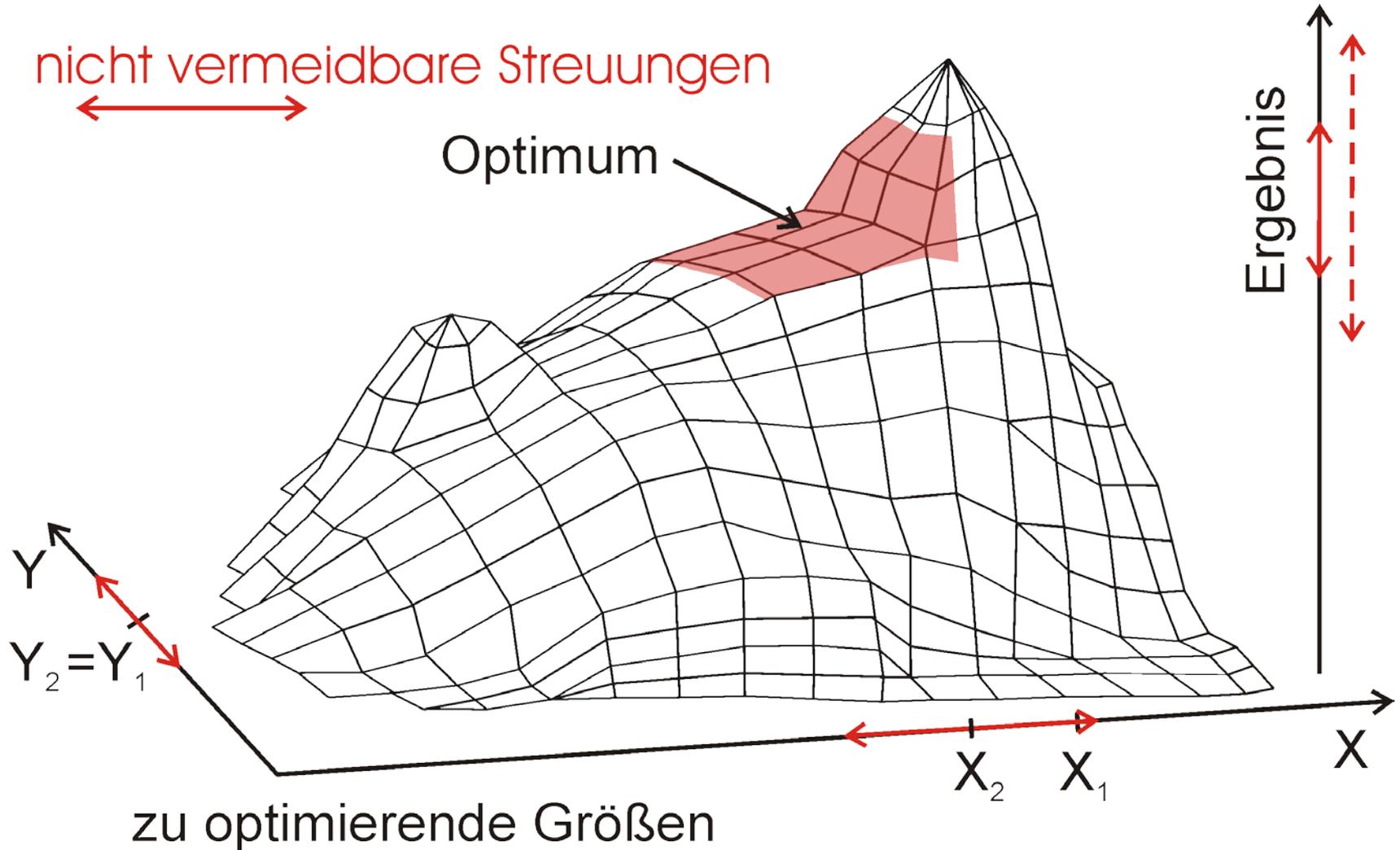
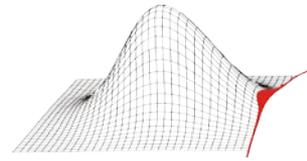


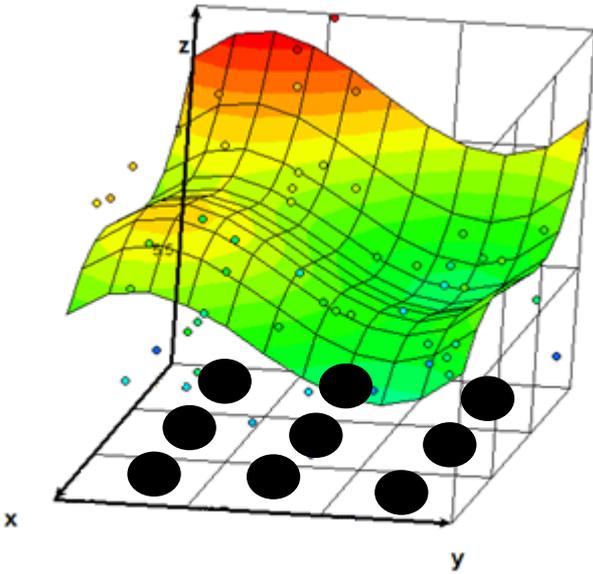
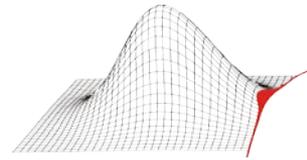
- Verwendung von Antwortflächen



Überprüfung des
ausgewählten
Shots mit dem
deterministischen
Modell !!!



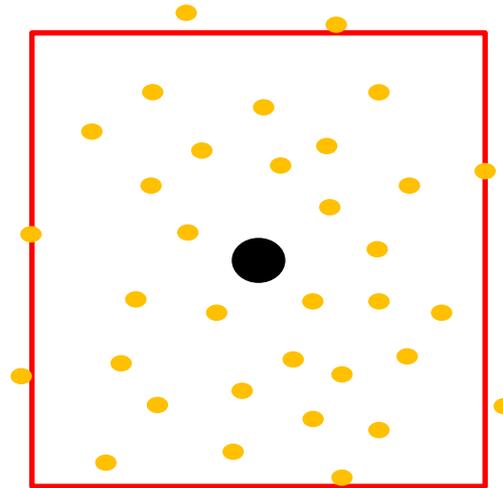





 Spannbreite
 Fertigungstoleranz

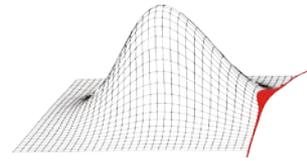
 Spannbreite Designraum

MCS

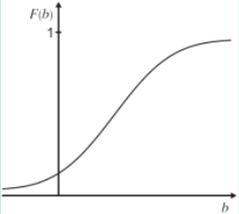
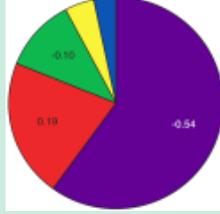
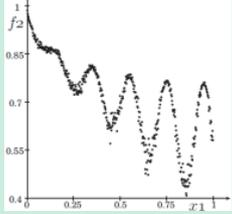
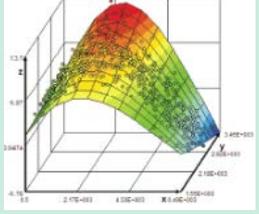


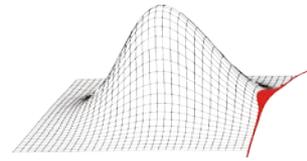
$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=0}^n (x_i - \bar{x}_i)^2$$

●



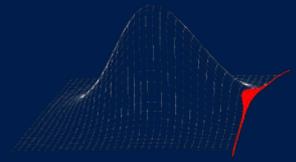
Anwendung der Monte-Carlo Methoden für probabilistische Untersuchungen unter Verwendung eines optimierten Latin-Hypercube-Samplings.

Ergebnisse der prob. Simulation	Ausfallwahrscheinlichkeiten	Detektion von kritischen Orten	Sensitivitäten	Robustheit	System Verbesserung
Dichtefunktion der Eingangsgrößen - geschätzt (Industriestandard)					
- genau bekannt					
Benötigte Anzahl an det. Rechnungen	$P_f \approx \frac{10}{n_{sim}}$	- nahezu unabhängig von Anzahl der Eingangsgrößen - typisch: $n_{sim} = 50 \dots 100$; minimal: $n_{sim} = \text{Eingangsgrößen} + 10 \dots 20$ - bessere Konfidenzintervalle mit höherer Anzahl n_{sim}			
Ergebnisse Eine einzige MCS liefert für alle Ergebnisgrößen:					



Vorteile*	Nachteile*
<ul style="list-style-type: none">- Genauigkeit der Ergebnisgrößen nahezu unabhängig von Anzahl der Eingangsgrößen- Betrachtung aller Ergebnisgrößen innerhalb einer MCS- Arbeiten mit deterministischen „black box“ Modellen möglich	<ul style="list-style-type: none">- Abhängigkeit der Güte der stat. Maße von der Anzahl der Realisierungen n_{sim}

* gegenüber anderen probabilistischen Methoden

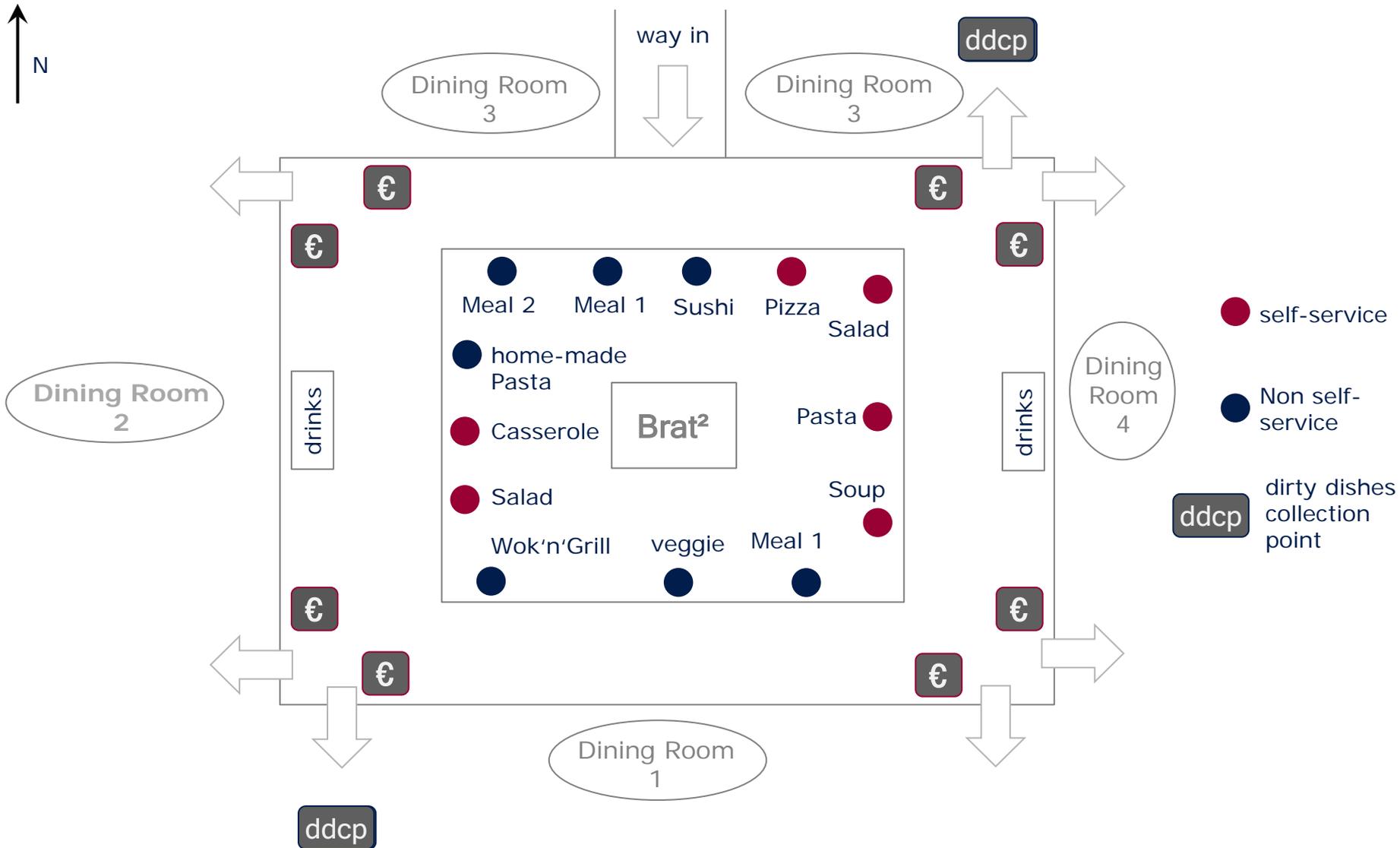
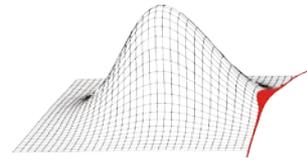


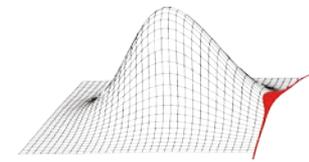
Seminar

Probabilistische Methoden in der Anwendung

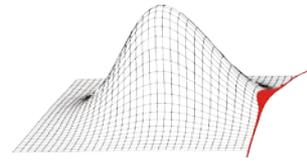
**Matthias Voigt
André Beschorner
Ilko Reuter**







- [1] SACHS, L.: *Angewandte Statistik, Anwendung statistischer Methoden*. Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 2004.
- [2] KECECIOGLU, D.: *Reliability and Life Testing Handbook*. Prentice Hall PTR, New Jersey, 1993.
- [3] FISHER, R. A.: *Statistical Methods for Research Workers*. Oliver & Boyd, Edinburgh, 1970.
- [4] MONTGOMERY, D. C.: *Design and Analysis of Experiments*. John Wiley & Son, Inc, New York, 2001.
- [5] MYERS, R. H.; MONTGOMERY, D. C.: *Response Surface Methodology*. John Wiley & Son, Inc, New York, 1995.
- [6] NETER, J.; KUTNER, M. H.; NACHTSHEIM, C. J.; WASSERMANN, W.: *Applied Linear Statistical Models*. WCB McGraw-Hill, New York, 1996.
- [7] BOX, G. E. P.; BEHNKEN, D. W. : *Some New Three-Level Designs for the Study of Quantitative Variables*. Technometrics, University of Princeton:455–475, 1960.
- [8] MEE, R. W.: *New Box-Behnken Designs*. TN 37996-0532, Department of Statistics, University of Tennessee, Knoxville, 2001.
- [9] WILL, J.; BUCHER, C.: *Statistische Maße für rechnerische Robustheitsbewertungen CAE gestützter Berechnungsmodelle*. Weimarer Optimierungs- und Stochastiktag 3.0, 2006.
- [10] ANDERSON, T. W.; DARLING, D. A.: *Asymptotic Theory of Certain "Goodness of Fit" Criteria Based on Stochastic Processes*. Annals of Mathematical Statistics 23, Seiten 193–212, 1952.



- [11] STEPHENS, M. A.: *EDF Statistics for Goodness of Fit and Some Comparisons*. Journal of the American Statistical Association, Vol. 69, Seiten 730–737, 1974.
- [12] WILL, J.; ROOS, D.; RIEDEL, J.; BUCHER, C.: *Robustheitsbewertung in der stochastischen Strukturmechanik*. NAFEMS Seminar: Use of Stochastics in FEM Analyses, 2003.
- [13] MCKAY, M. D.; CONOVER, W. J.; AND BECKMAN, R. J.: *A Comparison of Three Methods for Selecting Values of Input Variables in the Analysis of Output from a Computer Code*. Technometrics, 21:239–245, 1979.
- [14] SALIBY, E.: *Descriptive Sampling: An Improvement Over Latin Hypercube Sampling*. Proceedings of the Winter Simulation Conference, 1997.
- [15] BUCHER, C.: *Computational Analysis of Randomness in Structural Mechanics*. CRC Press/Balkema, Netherlands, 2009.
- [16] VOIGT, M.: *Probabilistische Simulation des strukturmechanischen Verhaltens von Turbinenschaufeln*. Dissertation, TU Dresden, TUDpress, Verlag der Wissenschaft GmbH, 2009.
- [17] STEIN, M. L.: *Interpolation of spatial data / some theory for kriging*. Springer-Verlag, Berlin/ Heidelberg/ New York, 1999.