

# EIN PARAMETRISCHES MODELL FÜR VERDICHTERSCHAUFELN ZUR ABBILDUNG VON GEOMETRISCHEN ABWEICHUNGEN IN DER NUMERISCHEN SIMULATION

## Alexander Lange

Technische Universität Dresden  
Institut für Strömungsmechanik  
D-01062 Dresden, Deutschland  
Email: Alexander.Lange@tu-dresden.de

## Konrad Vogeler

Technische Universität Dresden  
Institut für Strömungsmechanik  
D-01062 Dresden, Deutschland

## Henner Schrapp

Rolls-Royce Deutschland Ltd & Co KG  
Compressor Aerodynamics  
D-15827 Dahlewitz/Berlin, Deutschland

## Carsten Clemen

Rolls-Royce Deutschland Ltd & Co KG  
Compressor Aerodynamics  
D-15827 Dahlewitz/Berlin, Deutschland

## KURZFASSUNG

In diesem Paper wird ein Modell zur parameterbasierten geometrischen Variation von Verdichterschaufeln vorgestellt. Ausgehend von dem Ansatz die Geometrie realer Schaufeln dreidimensional zu erfassen, wird eine auf optischer Messtechnik basierende Prozesskette entwickelt, die es ermöglicht geometrische Abweichungen in der numerischen Simulation zu berücksichtigen. Da diese Abweichungen parameterbasiert erfasst werden, ist mit dem entwickelten Modell ebenfalls eine probabilistische Untersuchung hinsichtlich des Einflusses der Parameter auf die Performance der Schaufel möglich.

Die aus optischen Vermessungen gewonnenen Punktwolken werden in eine strukturierte, auf Profilschnitten basierende, Beschreibung überführt. In diesen Schnitten erfolgt die Zerlegung in Skelett- und Sehnenlinie sowie die Berechnung der Profildicken- und Wölbungsverteilung, woran die charakteristischen Profilparameter abgeleitet werden. Radiale Vermittlungsansätze reduzieren die Freiheitsgrade und bereiten den Zugang zu der dreidimensionalen parameterbasierten Beschreibung. Da die Parameter lediglich die Änderung zwischen Messung und Sollgeometrie erfassen und die Charakteristik der Schaufel erhalten bleibt, genügt eine vergleichsweise geringe Anzahl an Profilparametern zur Erfassung der gescannten Geometrie. Anhand einer Testschaufel wird gezeigt, dass das entwickelte Modell zur Abbildung der dreidimensionalen Abweichungen geeignet ist und für die Erfassung der wesentlichen Änderungen 16 Profilparameter genügen.

## NOMENKLATUR

$ax$  axiale Position des Profilschnittes  
 $d$  Profildicke  
 $f$  Fillet  
 $hk$  Hinterkante

$max$  Maximalwert  
 $N$  Anzahl  
 $P$  Parameter  
 $\bar{P}$  gemittelter Parameter  
 $par$  Partner (Profilpunkt der gegenüberliegenden Seite)  
 $pos$  relative Position  
 $pro$  Profilpunkt  
 $seh$  Sehnenlinie  
 $ske$  Skelettlinie  
 $tan$  tangentielle Position des Profilschnittes  
 $vk$  Vorderkante  
 $w$  Profilwölbung  
 $\beta$  Winkel der Wölbungsverteilung  
 $\lambda$  Staffelungswinkel  
 $r\theta, m$  Stromlinienkoordinatensystem  
 $s$  Koordinate in Spannweitenrichtung  
 $x, y, z, r, \theta$  Schaufelkoordinatensystem

## Indizes

$a$  Index der gemittelten Parameter  
 $j$  Index der Profilschnitte  
 $k$  azimuthaler Index  
 $n$  Index der Punktwolke  
 $o$  Index der Iterationen  
 $p$  Index der Parameter

## 1 EINLEITUNG

Durch Einsatz von Optimierungsroutinen in modernen Auslegungsprozessen wurden die Profile von Verdichterschaufeln stetig verbessert. In diesem Zusammenhang ist gestiegenes Interesse hinsichtlich der Bewertung des Fertigungsprozesses entstanden. Es wird das Ziel verfolgt, die Abweichung realer Schaufeln möglichst genau quantitativ zu erfassen und in der numerischen Simulation zu berücksichtigen, um ihren Einfluss auf die Performance der Schaufel zu bestimmen. Sind die Einflüsse bekannt, können die

Grenzen der Toleranzen gezielt verkleinert bzw. geweitet werden.

Zur Vermessung von Verdichterschaukeln finden traditionell Koordinaten-Messmaschinen (engl.: coordinate measurement machine) Verwendung. Sie nutzen das taktile Messprinzip, woraus zwar als Schwachpunkt die niedrige Geschwindigkeit der Vermessung resultiert, jedoch wird die Genauigkeit der Vermessung als hoch bewertet [1,2]. In der letzten Dekade hat besonders die optische Messtechnik große Fortschritte gemacht und in aktuellen Projekten hat sich ihr Einsatz bewährt. So haben Duó et al. [3] mittels optisch gescannten Verdichterschaukeln erfolgreich den Einfluss von Einschlägen an der Vorderkante auf das strukturelle Verhalten untersucht. Heinze et al. [4] werten eine optische Messserie von Verdichterschaukeln hinsichtlich der geometrischen Abweichungen aus und führen eine probabilistische HCF-Untersuchung durch. Holzhausen et al. [5] stellen eine Methode zur automatisierten dreidimensionalen Vermessung und Analyse von Verdichterschaukeln vor. Als Stärke der optischen Methoden nennen sie unter anderem die vergleichsweise schnelle Erfassung der kompletten dreidimensionalen Schaukeloberfläche inklusive der Funktionsflächen im Schaukelfuß.

Der Schwerpunkt dieses Papers liegt jedoch nicht auf dem Gebiet der optischen Messtechnik sondern vielmehr auf der systematischen Auswertung der durch optische Messungen ermittelten Datensätze. Ein weiteres Ziel besteht in der Quantifizierung der gemessenen geometrischen Abweichungen und deren Berücksichtigung in der numerischen Simulation. Als Basis der entwickelten Methode dienen die Datensätze der gescannten Schaukeloberfläche, die unsortiert und punktweise in dem Koordinatensystem des Verdichters vorliegen. Um Zugang zu der in diesen Punktwolken gebundenen Information zu erhalten, ist es erforderlich, die Schaukeln in eine systematische Beschreibungsform zu überführen. In den vergangenen Jahren wurden hierzu verschiedene Modelle entwickelt, welche prinzipiell das Ziel verfolgen die hohe Anzahl an gemessenen Punkten durch möglichst wenige Parameter zu erfassen. So stellt z.B. Ristic et al. [6] einen Ansatz vor, der die Abbildung der gemessenen Schaukel durch ein Update der CAD-Geometrie ermöglicht. Hierbei werden die Kontrollpunkte der NURBS-basierten CAD-Beschreibung derart verschoben, dass der Unterschied zwischen gescannter und CAD-Geometrie minimal wird und zu gleich die Topologie erhalten bleibt. Die Anzahl der Kontrollpunkte dieser Spline-Flächen schreibt dabei den Freiheitsgrad fest. Eine Methode zur parameterbasierten Beschreibung von Turbomaschinenschaukeln wurde von *Numecca* mit *Autoblade Fitting* entwickelt. Bei dem Algorithmus werden die Parameter eines nutzerdefinierten geometrischen Modells so angepasst, dass sie die Zielgeometrie, z.B. die gemessene Schaukel, möglichst gut abbilden [7]. In diesem Zusammenhang soll beispielhaft das parametrische Schaukelmodell von Gräsel et al. [8] erwähnt werden, mit dem eine Schaukel durch radial gestapelte Profilschnitte voll parametrisch durch ca. 100 Parameter beschrieben werden kann.

Die bisher aufgeführten Modelle verfolgen das Ziel, die gemessene Schaukel vollständig durch die Parameter des Auslegungsprozesses abzubilden. Reale Schaukeln weisen jedoch Abweichungen auf, die dieser Parametersatz gegebenenfalls nicht exakt beschreiben kann. Werden diese Methoden dennoch zur Abbildung der gemessener Schaukeln verwendet, können nicht unwesentliche Approximationsfehler entstehen. Mit dem Ziel diesen Fehler zu minimieren sind Methoden entwickelt worden, die nicht die gemessenen Geometrien komplett sondern lediglich die Differenz zwischen gemessener und Sollgeometrie erfassen. Die Hauptkomponentenanalyse (engl.: Principal Component Analysis, PCA), welche das Ziel verfolgt umfangreiche Datensätze zu strukturieren und zu vereinfachen, ermöglicht eine Reduktion dieser Differenzen auf aussagekräftige Linearkombinationen. Hierbei werden die (korrelierten) Freiwerte in den Vektor der Hauptkomponenten überführt, welcher unkorreliert und geringerer Dimension ist [9]. Die erfolgreiche Anwendung dieser Methode zur Modellierung der geometrischen Abweichungen realer Schaukeln wurde von verschiedenen Autoren gezeigt [10–12]. Sie berechnen den normalen Abstand jedes Punktes der vermessenen Schaukel zur Oberfläche der Sollgeometrie und transformieren diesen Vektor unter Verwendung der PCA in die Hauptkomponenten. Garzon und Darmofal konnten für einen zweidimensionalen Schaukelchnitt zeigen, dass 99% der Abweichungen mit sechs Moden abgebildet werden können [10]. Einen geringfügig anderen Weg beschreiben Beachkofski und Grandhi [13], indem sie als Freiwerte nicht die Abstände der Oberflächen nutzen, sondern die Koordinaten der Mittelfläche mit der zugehörigen Dickeninformation bestimmen und in eine PCA überführen. Lamb und Darmofal nutzen zwar die PCA um die geometrischen Abweichungen zu modellieren, bestimmen darüber hinaus jedoch ebenfalls physikalische Parameter wie Sehnenlänge und Dicke der Vorderkante [14, 15].

In diesem Paper wird eine Methode vorgestellt, die die diskutierten Ideen aufgreift und in einem neuen Modell vereinigt. Basierend auf der Annahme, dass sich die gemessene Schaukel nur geringfügig von der Sollgeometrie unterscheidet, soll nur die Abweichung modelliert werden. Hierzu finden klassische Profilparameter als Freiwerte Verwendung. Die erforderlichen Profilschnitte werden aus der dreidimensionalen Punktwolke extrahiert und auf Skelett- und Sehnenlinie sowie Dicken- und Wölbungsverteilung zurück geführt. Durch radiale Stapelung der individuellen Schnitte ist die gemessene Schaukel dreidimensional erfasst. Ein Morphing-Algorithmus realisiert die Verformung des diskreten Rechnetzes, womit die Profilparameter der vermessenen Schaukel direkt in die numerische Simulation überführt werden. Sind die Änderungen der Parameter harmonisch über der Schaukelhöhe, genügen wenige radiale Stützstellen für eine präzise dreidimensionale Abbildung der gescannten Schaukel. Da das entwickelte Modell vollständig parametrisiert ist, ermöglicht es eine probabilistische Simulation zur Bestimmung des Einflusses der Profilparameter auf die Performance der Schaukel.

## 2 BERECHNUNG DER PROFILPARAMETER

### 2.1 Registrierung der Punktwolke

Als Ergebnis der optischen Vermessung wird eine unstrukturierte Punktwolke ermittelt, welche die Oberfläche der Schaufel abbildet. Zunächst befinden sich diese Punkte im Koordinatensystem der Messmaschine. Kommerzielle Software, z.B. die Softwareanwendung *Geomagic Studio*, ermöglicht die Ausrichtung gegen eine als CAD-Modell vorliegende Referenzgeometrie. Diese Registrierung kann nach dem Prinzip „best fit“ erfolgen, womit alle gemessenen Punkte genutzt werden, die Messung mit der Referenz in Deckung zu bringen.

Interessant für Anwendungen der Strömungsmechanik sind jedoch auch Informationen bezüglich der Ausrichtung der Schaufel im Gaspfad. Bei der optischen Vermessung können vergleichsweise einfach die hierfür relevanten Funktionsflächen im Schaufelfuß mit erfasst werden. Erfolgt die Registrierung nur über diese Flächen, so kann die Orientierung der Schaufel im Verdichter approximiert werden [5].

### 2.2 Berechnung der Profilschnitte

Durch den Prozess der Registrierung liegt die Punktwolke der gemessenen Schaufel in dem Koordinatensystem des Verdichters vor. Sie hat vorerst keine Struktur, d.h. ein dreidimensionaler Vektor  $\vec{X}_n$  mit  $N_n \approx 10^6$  Elementen beschreibt die Punkte. Die Einteilung in Profilschnitte ermöglicht die Strukturierung der Punktwolke. Dass dies im Postprocessing der eigentlichen Messung erfolgt, gilt als Vorteil des optischen gegenüber dem taktilen Messprinzip, bei dem mit zeitlich vertretbarem Aufwand nur Punkte entlang vorher definierter Kurven aufgenommen werden können. Die hier entwickelte Methode ist flexibel hinsichtlich der Anzahl sowie des Verlaufes der Profilschnitte, die durch eine beliebige analytische Gleichung  $r_j(z)$  definiert werden. Üblich ist dabei die lineare Interpolation aus der Geometrie von Nabe und Gehäuse, womit

$$r_j(z) = s_j r^{Nabe}(z) + (1 - s_j) r^{Gehaeuse}(z) \quad (1)$$

gilt und jeder Profilschnitt  $j$  in Spannweitenrichtung dem Wert  $s_j$  zugeordnet wird. Die Spannweitenkoordinate kann als dimensionslose radiale Koordinate zwischen Nabe und Gehäuse

$$s_j = \frac{r_j - r^{Nabe}}{r^{Gehaeuse} - r^{Nabe}} \quad (2)$$

verstanden werden. Durch Rotation der Kurve  $r_j(z)$  entsteht eine Rotationsfläche  $r_j(xyz)$ , anhand der die Profilschnitte extrahiert werden. Die Projektion einer gemessenen Schaufel mit 49 äquidistanten Profilschnitten in die  $rz$ -Ebene ist in Bild 1 dargestellt.

Jeder Punkt des Profilschnittes entspricht dem Durchstoßpunkt des Vektors zweier benachbarter Punkte der Punktwolke

$$\vec{X}_{n12} = \vec{X}_{n2} - \vec{X}_{n1} \quad (3)$$

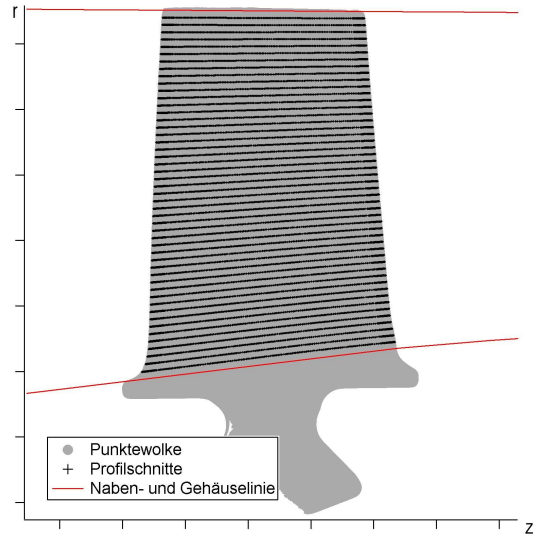


Bild 1. Darstellung einer gemessenen Schaufel sowie der Profilschnitte zwischen Nabe und Gehäuse in der  $rz$ -Ebene des Schaufelkoordinatensystems.

durch die Rotationsfläche  $r_j(xyz)$ . Hierzu wird die Fläche um den geschätzten Durchstoßpunkt

$$\vec{X}_k^0 = \frac{1}{2} (\vec{X}_{n1} + \vec{X}_{n2}) \quad (4)$$

durch eine Ebene approximiert. Die Lösung des algebraischen Problems liefert einen verbesserten Durchstoßpunkt  $\vec{X}_k^1$  durch die Ebene. Die iterative Berechnung wird fortgeführt, bis Konvergenz erreicht ist und der Punkt des Profilschnittes gleich dem Durchstoßpunkt der letzten Iteration

$$\vec{X}_k^{pro} = \vec{X}_k^{No} \quad (5)$$

gesetzt wird. Dieser Ansatz ermöglicht die Beschreibung der geschnittenen Schaufel durch  $N_j \approx 50$  Profilschnitte mit jeweils  $N_k \approx 500$  Elementen an Stelle der eingangs  $N_n \approx 10^6$  unstrukturierten Punkte. Da die weiteren Berechnungen auf den Schnitten erfolgen und somit für eine Berechnung  $j = const$  gilt, soll der Index  $j$  in der weiteren Dokumentation weggelassen werden.

Die berechneten Profilpunkte befinden sich auf der beschriebenen dreidimensionalen Rotationsfläche und sind im Schaufelkoordinatensystem bekannt. Um die Berechnung der Profilparameter zu vereinfachen, erfolgt die Überführung in eine zweidimensionale Beschreibung unter Erhaltung der wirklichen Längen. Hierzu wird die meridional verlaufende Koordinate  $m$  sowie die orthogonal orientierte Koordinate  $r\theta$  eingeführt. Die Transformation erfolgt über

$$\begin{aligned} r\theta_k &= r_k \theta_k \\ m_k &= m_{k-1} + \sqrt{(r_k - r_{k-1})^2 + (z_k - z_{k-1})^2} \end{aligned} \quad (6)$$

wobei der Winkel mit

$$\theta_k = \arctan \frac{y_k}{x_k} \quad (7)$$

berechnet wird. Somit sind die Punkte der Profilschnittes

$$\vec{X}_k^{pro} = \begin{bmatrix} r\theta_k \\ m_k \end{bmatrix} \quad (8)$$

im Stromlinienkoordinatensystem (auch: *blade-to-blade-space*) bekannt, in dem die Berechnung der Profilparameter erfolgt.

### 2.3 Zerlegung des Profils in Skelett- und Sehnenlinie

Zur Berechnung der Skelettlinie des Profilschnittes wurde ein zweistufiger Algorithmus entwickelt, welcher nach der Bestimmung der approximierten Skelettlinie einen Algorithmus zur Rückführung jedes Profilpunktes auf die Skelettlinie anschließt.

#### Rollradienmethode

Auf Basis der Punkte des Profilschnittes (Gl. 8) erfolgt mit der Rollradienmethode (RRM) zunächst die Berechnung einer approximierten Skelettlinie. Hierbei werden innerhalb des Profils imaginäre Kreise zunehmenden Radius abgerollt [16]. Schneiden sich die Trajektorien der Kreismittelpunkte, ist ein Skelettlinienpunkt der Rollradienmethode bestimmt, siehe Bild 2. Weiterhin ist die Profildicke

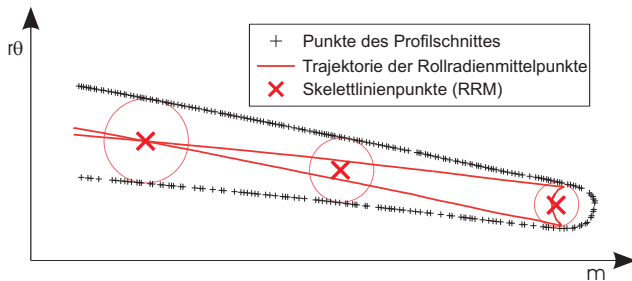


Bild 2. Skizze zur Rollradienmethode. Der Schnittpunkt der Trajektorie bestimmt den Skelettlinienpunkt des größten Rollradius. Zu den weiteren Skelettlinienpunkten ist ebenfalls der zugehörige Rollradius eingezeichnet.

als Durchmesser des Rollkreises bekannt. Hiermit lassen sich die maximale Dicke sowie die Dickenrücklage ableiten. Die Dicke kann recht gut bestimmt werden. Die Rücklage hingegen ist vergleichsweise ungenau, da auf Grund von schleifenden Schnitten im Bereich der maximalen Profildicke die Positionen unscharf werden. Aus den Schnittpunkten der kleinsten Kreise kann weiterhin die minimale Profildicke und somit die Radien von Vorder- und Hinterkante abgeleitet werden. Für eine befriedigende Auflösung

der Parameter ist jedoch eine hohe Anzahl der Iterationen erforderlich, womit die Lösung sehr zeitaufwendig wird. Weiterhin ist die RRM ein symmetrisches Modell, d.h. ellip-tische Vorder- oder Hinterkanten werden nicht erkannt. Die Methode stellt jedoch eine robuste Möglichkeit dar einen numerischen Zugang zu dem Profilschnitt zu schaffen.

#### Algorithmus zur inversen Skelettlinienberechnung

Zum Zwecke höherer Genauigkeit soll zu jedem Punkt des Profilschnittes  $\vec{X}_k^{pro}$  der korrespondierende Punkt der Skelettlinie  $\vec{X}_k^{ske}$  bestimmt werden. Die Auflösung der Messung bestimmt somit die der Skelettlinie. Diese Herangehensweise kann als inverse Methode verstanden werden und entspricht der Zerlegung des Profils analog der klassischen Profilbeschreibung [17].

Der entwickelte Algorithmus baut auf einer, mit geringen Anzahl an Iterationen ( $N_o \approx 10$ ), vorangegangenen Berechnung mit der Rollradienmethode auf. Die Koordinaten der dabei berechneten Skelettlinienpunkte dienen als Stützpunkte eines Polynoms, welches die approximierte Skelettlinie definiert. Der somit ermittelte analytische Zusammenhang soll über die gesamte Länge des Profils gültig sein. Diese Annahme ist gerechtfertigt, da lediglich der Anstieg der Kurve in der weiteren Berechnung verwendet wird.

Die Berechnung der Skelettlinie der inversen Methode basiert auf dem Zusammenhang zwischen Druck- und Saugseite. Da die Punkte des Profilschnittes zufällig angeordnet sind, ist es erforderlich jeweils den Partner des Profilpunktes auf der gegenüber liegenden Seite zu bestimmen. Hierzu wird zuerst die durch den Punkt des Profilschnittes verlaufende und normal zur approximierten Skelettlinie orientierte lineare Funktion bestimmt. Der Schnittpunkt dieser Normale mit dem approximierten Profil auf der gegenüberliegenden Seite legt den Partner des untersuchten Profilpunktes fest. Er soll mit  $\vec{X}_k^{par}$  bezeichnet werden. Die Koordinaten des Skelettlinienpunktes sind nun über den Mittelpunkt des Vektors beider Profilpunkte

$$\vec{X}_k^{ske} = \frac{1}{2} \left( \vec{X}_k^{pro} + \vec{X}_k^{par} \right) \quad (9)$$

definiert. Weiterhin entspricht der Betrag des Vektors zwischen den Profilpunkten

$$d_k = \left| \vec{X}_k^{pro} - \vec{X}_k^{par} \right| \quad (10)$$

der Profildicke, siehe Bild 3.

Der entwickelte Algorithmus funktioniert sehr gut, sofern Profillinie und approximierte Skelettlinie in etwa parallel verlaufen. Problematisch ist die Berechnung hingegen in der Nähe der Vorder- und Hinterkante. Ein Grund hierfür besteht in dem Effekt, dass die Qualität der Messung an stark gekrümmten Konturen schlechter und somit die Profillinie tendenziell verrauschter ist. Ein prinzipielles Problem stellt jedoch die im Übergang zu Vorder- bzw. Hinterkante ungenauer werdende Berechnung des Schnittpunktes dar.

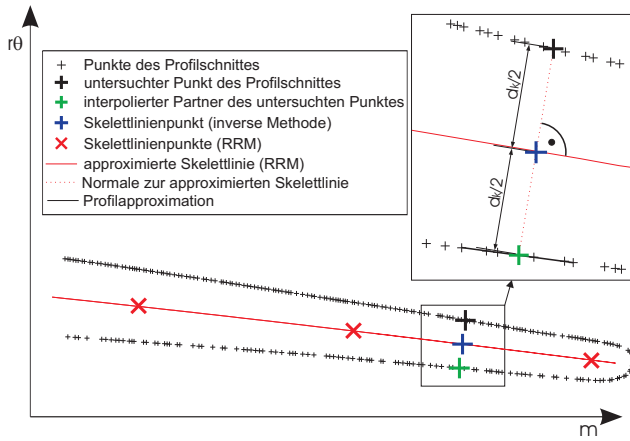


Bild 3. Skizze zum inversen Skelettlinien-Algorithmus.

Die Normale der approximierten Skelettlinie und die Profillinie verlaufen im Übergang zu dem ersten bzw. letzten Punkt der Skelettlinie parallel. Die geforderte Genauigkeit wird in diesen Bereichen durch die schleifenden Schnitte nicht mehr erreicht. Auch alternative Algorithmen, wie der von Vinnemeier beschriebene Algorithmus, der für jeden Punkt der Skelettlinie neben der Erfüllung von Gl. 9 noch eine Gleichung für die Ableitung der Skelettlinie löst, zeigen im Übergang zu Vorder- und Hinterkante vergleichbare Probleme [18].

Als Ausweg bietet sich die Extrapolation der Skelettlinie an. Die, bei der Anwendung des entwickelten Modells, gewonnene Erfahrung besagt, dass die beschriebenen Genauigkeitsprobleme und somit die Extrapolation nur auf einen sehr geringen Teil der Sehnenlänge angewendet wird. Sie kann überschlägig aus dem Verhältnis der summierten halben Profildicken an Vorder- und Hinterkante zur Sehnenlänge

$$\phi_{extrapol} = \frac{d^{vk}/2 + d^{hk}/2}{c} \approx 2\% \quad (11)$$

geschätzt werden. Im Bereich der Extrapolation wird das Lot vom Profilverpunkt auf die extrapolierte Skelettlinie gefällt und der berechnete Fußpunkt als Skelettlinienpunkt akzeptiert.

Ist die Skelettlinie vollständig bekannt, schließt sich die Berechnung der Sehnenlinie an. Sie ist im Stromlinienkoordinatensystem als gerade Verbindung vom ersten zum letzten Punkt der Skelettlinie definiert. Weitergehend wird für jeden Punkt der Skelettlinie  $\vec{X}_{ske}$  ein korrespondierender Punkt auf der Sehnenlinie  $\vec{X}_{seh}$  bestimmt, indem sein Lot auf die Sehnenlinie gefällt wird. Die Profilverwölbung entspricht dem Betrag des Vektors zwischen beiden Punkten und wird über

$$w_k = \left| \vec{X}_k^{ske} - \vec{X}_k^{seh} \right| \quad (12)$$

berechnet. Die Kurve, die sich bei Darstellung der Profilverwölbung über der Sehnenlinie ergibt, wird als Wölbungs-

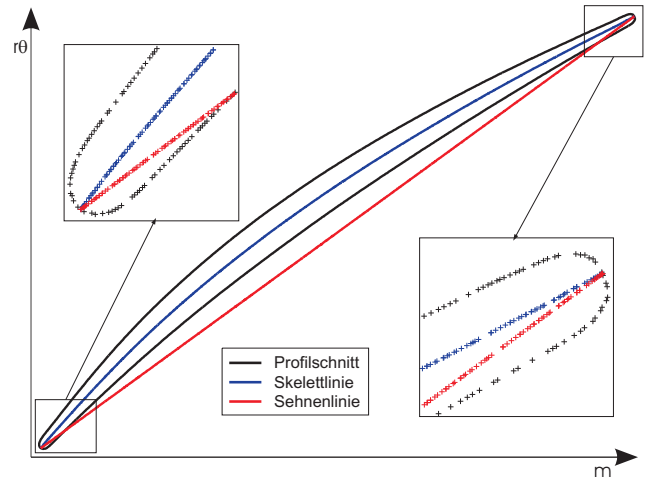


Bild 4. Ergebnis der inversen Methode. Die Skelettlinie und Sehnenlinie des Profilschnittes wurden berechnet.

verteilung und die der Profildicke analog als Dickenverteilung bezeichnet.

### Bewertung der Skelettlinienberechnung

Die Berechnung der Skelettlinie ist der zentrale Punkt bei der Zerlegung des Profilschnittes. Mit dem entwickelten zweistufigen Algorithmus ist eine vergleichsweise robuste Methode mit der Möglichkeit zur internen Validierung entwickelt worden. Er verspricht, verglichen mit bekannten Algorithmen, höhere Genauigkeit, da für jeden Punkt des Profilschnittes der entsprechende Punkt der Skelettlinie bestimmt wird. In Bild 5 sind die Ergebnisse beider Methoden

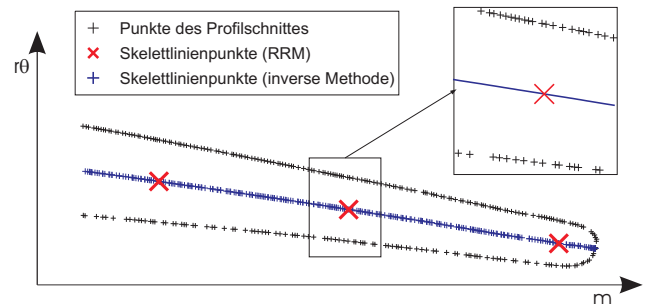


Bild 5. Vergleich der Punkte der Skelettlinie der Rollradienmethode und der inversen Methode.

vergleichend dargestellt. Es ist zu erkennen, dass jeweils der gleiche Verlauf der Skelettlinie bestimmt wird, jedoch die Auflösung der inversen Methode wesentlich höher ist. Das Erreichen einer vergleichbaren Auflösung über die Rollradienmethode wäre numerisch sehr viel teurer. Nach Erfahrung des Autors entspricht die erforderliche Rechenzeit für einen Schritt des Rollradialgorithmus, welcher lediglich zwei Skelettlinienpunkte bestimmt, etwa der Zeit, die für die gesamte inverse Berechnung benötigt wird. Liegt hohe



Punktdichte vor, verschiebt sich das Verhältnis zu Gunsten der inversen Methode.

## 2.4 Profilparameter

Obwohl heutzutage die geometrische Beschreibung von Turbomaschinenschaufeln durch NURBS-basierte räumliche Freiformflächen realisiert wird [6], sind in Auslegungsumgebungen häufig Schnittstellen implementiert, die die numerisch begründeten Stützstellen der Spline-Polynome in physikalisch begründete Parameter überführen. So hat sich neben der isolierten Beschreibung von Druck- und Saugseite besonders für Verdichterschaufeln die klassische Methode der Überlagerung von Dicken- und Wölbungsverteilung auch in aktuellen Applikationen zur Auslegung etabliert [8]. Der nachfolgend abgeleitete Parametersatz orientiert sich an dieser klassischen Profilbeschreibung und nutzt Charakteristika der Dicken- und Wölbungsverteilung zur Parametrisierung.

### Parameter des Profilschnittes

Aus der Lage des Profilschnittes im Schaufelkoordinatensystem werden die Parameter axiale und tangentielle Position ( $ax$  und  $tan$ ) des ersten Punktes der Sehnenlinie bestimmt, welche in der gewählten Konfiguration der  $z$ - bzw.  $y$ -Koordinate entsprechen.

Im Stromlinienkoordinatensystem ist der Stafflungswinkel zwischen erstem und letztem Punkt der Sehnenlinie und der meridionalen Richtung über den eingeschlossenen Winkel

$$\lambda = \arctan \left( \frac{r\theta_{N_k}^{seh} - r\theta_0^{seh}}{m_{N_k}^{seh} - m_0^{seh}} \right) \quad (13)$$

definiert. Die Sehnenlänge

$$c = \left| \vec{X}_{N_k}^{seh} - \vec{X}_0^{seh} \right| \quad (14)$$

bestimmt sich über den Abstand des ersten zum letzten Punkt.

### Parameter der Dicken- und Wölbungsverteilung

Aus dem Verlauf der Dickenverteilung werden drei charakteristische Punkte bestimmt: die maximale Dicke, die Dicke der Vorderkante und die Dicke der Hinterkante sowie ihre Positionen auf der Sehnenlinie. Analog folgt für die Wölbungsverteilung die maximale Wölbung sowie die Winkel der Kurve gegenüber der Sehne im Bereich der Vorder- und Hinterkante. Die Bestimmung erfolgt über ausgewählte analytische Funktionen, die auf die diskreten Verteilungen gefittet werden, siehe Bild 6. Zum Einen wird damit eine Glättung der verrauschten Messpunkte erreicht und zum anderen eine schnellere und präzisere Auswertung ermöglicht.

Die Bestimmung der maximalen Dicke sowie der maximalen Wölbung erfolgt in zwei Schritten. Eingangs wird der maximale Wert der diskreten Verteilung gesucht. Im

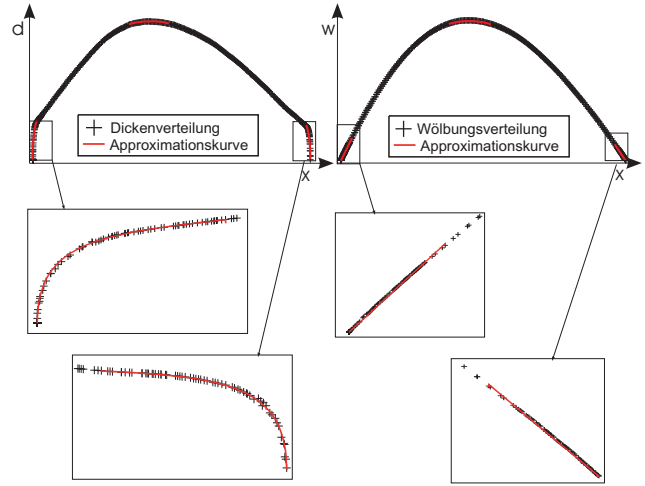


Bild 6. Darstellung der diskreten Dicken- und Wölbungsverteilungen sowie der Approximationskurven.

zweiten Schritt erfolgt die Abbildung der diskreten Verteilung um den Maximalwert durch eine gefittete quadratische Funktion. Analytisch wird ihr Maximum mit entsprechender Position bestimmt, womit  $d_{max}$  und  $pos_{d_{max}}$  sowie analog  $w_{max}$  und  $pos_{w_{max}}$  folgen.

Zur Auswertung der Dickenverteilung im Bereich von Vorder- und Hinterkante ist eine Ansatzfunktion höherer Ordnung erforderlich. Es zeigte sich, dass die Funktion

$$\tilde{y}_d(x) = A x^{0.5} + B x + C x^{1.5} \quad (15)$$

für die hier betrachtete Verdichterschaufel sehr gut geeignet ist, die ersten und letzten 2% der Dickenverteilung inklusive der starken Krümmungsänderung abzubilden. Dieser große Gradient wird bei der Berechnung der Position der Vorder- bzw. Hinterkante genutzt, die als Wert der Sehnenlinie definiert wurde, an dem der Anstieg der gefitteten Funktion den geforderten Wert  $m_d$  hat. Da die Parameter des Ansatzes bekannt sind, kann die Lösung der Bedingung

$$m_d = \left| \frac{d\tilde{y}_d(x)}{dx} \right| \implies pos_{d_{vk}}, pos_{d_{hk}} \quad (16)$$

analytisch erfolgen. Als Anstieg wurden in Rahmen dieser Untersuchung Werte zwischen 0.2 und 1, also etwa zwischen 10 und 45 Grad verwendet. Dabei ist nicht der Absolutwert das entscheidende Kriterium sondern die Tatsache, dass die charakteristische Änderung möglichst gut erfasst wird. Ist die Position bekannt, folgt der entsprechende Dickenwert als Funktionswert

$$d_{vk} = \tilde{y}_d(pos_{d_{vk}}) \quad \text{und} \quad d_{hk} = \tilde{y}_d(pos_{d_{hk}}). \quad (17)$$

Die Bestimmung der Winkel an Vorder- und Hinterkante erfolgt über die Approximation der Wölbungsverteilung

etwa im Bereich der ersten und letzten 2% über eine lineare Funktion  $\tilde{y}_w(x)$ . Aus dem Anstieg der Kurve

$$\beta = \arctan\left(\frac{d\tilde{y}_w(x)}{dx}\right) \quad (18)$$

erfolgt die Bestimmung der Winkel  $\beta_{vk}$  und  $\beta_{hk}$ . Es wird vereinbart, dass jeweils der Winkel zwischen Wölbungskurve und Abszisse dem Vorderkanten- bzw. Hinterkantenwinkel entspricht.

### Zusammenstellung der Profilparameter

In Tabelle 1 sollen zusammengefasst die Profilparameter aufgelistet werden.

Tabelle 1. Die Profilparameter.

Symbol	Bezeichnung
$ax, tan$	axiale und tangentielle Position des Profilschnittes
$\lambda$	Staffelungswinkel
$c$	Sehnenlänge
$d_{vk}, d_{hk}$	Dicke an Vorder- und Hinterkante
$pos_{d_{vk}}, pos_{d_{hk}}$	zugeordnete Position auf der Sehne
$d_{max}, w_{max}$	maximale Profildicke und Wölbung
$pos_{d_{max}}, pos_{w_{max}}$	zugeordnete Position auf der Sehne
$\beta_{vk}, \beta_{hk}$	Winkel an Vorder- und Hinterkante

Insgesamt werden 14 Profilparameter verwendet, womit für den Vektor eines Profilschnittes

$$\vec{P} = P_p = [ax, tan, \lambda, c, d_{max}, pos_{d_{max}}, d_{vk}, pos_{d_{vk}}, d_{hk}, pos_{d_{hk}}, w_{max}, pos_{w_{max}}, \beta_{vk}, \beta_{hk}] \quad (19)$$

folgt.

### 2.5 Dreidimensionales Schaufelmodell

Die Zusammenführung der einzelnen Profilschnitte, welche bisher als individuelle Elemente betrachtet wurden, erlaubt die Zusammenstellung des 3D-Parametersatzes und somit einer dreidimensionalen Geometrie. Nachfolgend wird eine, der üblichen Stapelung der Profilschnitte entsprechende, radiale Anordnung der Parameter abgeleitet. Die Anzahl der Profilschnitte  $N_j$  bestimmt neben der Anzahl der Parameter pro Schnitt  $N_p$  die Dimension der resultierenden Parametermatrix, welche mit  $\mathbf{P}$  bzw.  $P_{pj}$  bezeichnet werden soll. Die Zuordnung des jeweiligen Profilschnittes

zur dreidimensionalen Schaufelgeometrie erfolgt über seine Spannweitenkoordinate  $s_j$ . Die Darstellung der Parameter erzeugt einen Verlauf wie in Bild 7 gezeigt, der nachfolgend Spannweiten-Plot genannt wird.

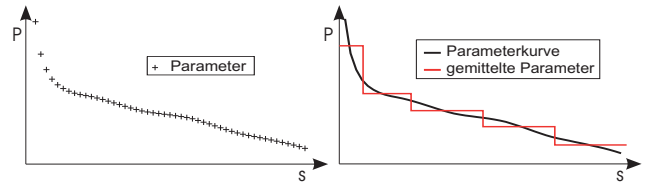


Bild 7. Darstellung des Spannweiten-Plots eines Parameters (links) und der berechneten gemittelten Werte (rechts).

Im Rahmen dieser Untersuchung wurden  $N_j = 49$  äquidistant verteilte Profilschnitte verwendet. Die hohe Anzahl ermöglicht es, die Konsistenz der Auswertung zu bewerten. Da für die Parameter im Spannweiten-Plot ein harmonischer Verlauf erwartet wird, können Ausreißer erkannt und von der weiteren Auswertung ausgeschlossen werden. Durch Multiplikation der Anzahl der Schnitte mit der Anzahl der Parameter pro Schnitt kann die Anzahl der Elemente der Parametermatrix

$$\mathbf{P} = P_{pj} = \begin{vmatrix} ax_1 & tan_1 & \dots & \beta_{hk_1} \\ ax_2 & tan_2 & \dots & \beta_{hk_2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ax_{N_j} & tan_{N_j} & \dots & \beta_{hk_{N_j}} \end{vmatrix} \quad (20)$$

gleich 686 bestimmt werden. Für eine weitergehende (probabilistische) Analyse ist diese Datenmenge zu umfangreich, zumal die Parameter benachbarter Schnitte auf Grund des geringen radialen Abstandes erheblich korrelieren. Die Mittelung über die Spannweitenkoordinate soll eine Reduktion der Anzahl der Profilschnitte  $N_j$  auf die geringere Anzahl an Bereichen  $N_a$  erlauben. Gleichzeitig wird die Diskretisierung der Parameter von den fixen Stützstellen  $s_j$  gelöst und in flexible Grenzen der Spannweitenkoordinate überführt. Die resultierende, in Spannweitenrichtung gemittelte Parametermatrix, mit nur noch  $N_p \cdot N_a$  Elementen, soll mit  $\bar{\mathbf{P}}$  oder in Koordinatenschreibweise mit  $\bar{P}_{pa}$  bezeichnet werden. Die Mittelwertbildung erfolgt innerhalb der Grenzen der spanwise-Koordinate  $s_{a-1}$  und  $s_a$  und ist über

$$\bar{P}_{pa} = \frac{1}{s_a - s_{a-1}} \int_{s_{a-1}}^{s_a} P_{pj}(s) ds \quad (21)$$

definiert. Die Implementierung der Integration erfolgt durch die Trapezregel mit Interpolation der Werte an den Bereichsgrenzen. Somit kann die erforderliche Genauigkeit auch dann erreicht werden, wenn nur wenig Stützstellen innerhalb eines Bereiches liegen. Neben der Verringerung der Dimension besteht ein weiterer Vorteil der Parametermittlung darin, dass die Auswertung auch dann automatisiert er-

folgen kann, wenn für einzelne Schnitte keine gültigen Parameter bestimmt werden können, da dies keinen Einfluss auf die Besetzung der gemittelten Parametermatrix

$$\bar{\mathbf{P}} = \bar{P}_{pa} = \begin{pmatrix} \overline{ax_1} & \overline{tan_1} & \dots & \overline{\beta_{hk_1}} \\ \overline{ax_2} & \overline{tan_2} & \dots & \overline{\beta_{hk_2}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \overline{ax_{N_a}} & \overline{tan_{N_a}} & \dots & \overline{\beta_{hk_{N_a}}} \end{pmatrix} \quad (22)$$

hat. Es ist somit ein Gewinn an Allgemeingültigkeit und numerischer Implementierbarkeit erreicht.

## 2.6 Filletmodell

Der Parametersatz (Gl. 22) ist zur Beschreibung des Schaufelblattes geeignet. Der Übergang vom Blatt zur Plattform im Fillet bleibt jedoch außen vor, da die großen Gradienten nicht in den gemittelten Parametern erfasst werden. Doch gerade hier sieht sich der Designer mit konträren Zielstellungen konfrontiert. Sollte im Sinne der mechanischen Lebensdauer der Fillet möglichst harmonisch und somit größer ausgeführt sein, um die Kerbwirkung zu verringern, wird im Sinne der Minimierung des Gewichtes und der Optimierung der Aerodynamik ein möglichst geringer Fillet gefordert. Durch die konträren Prinzipien bei der Auslegung ist die Wichtigkeit der möglichst exakten Abbildung der gemessenen Abweichungen des Fillets hoch.

In der numerischen Strömungsmechanik werden mit Hexaederelementen erfahrungsgemäß die besten Ergebnisse erzielt. Gerade mit diesen Elementen ist jedoch die Modellierung des Fillets schwierig und geht einher mit einer schlechteren Netzqualität und gegebenenfalls schlechterer Konvergenz und numerischer Stabilität. Diese Aspekte haben dazu geführt, dass der Fillet in der aerodynamischen Auslegung zuerst meist unberücksichtigt bleibt und lediglich am finalen Modell über Vorgaben der Fertigung und der Strukturanalyse hinzugefügt wird. So ist auch zu erklären, dass sich kommerzielle Tools bei der automatisierten Vernetzung des Fillet auf den Radius beschränken und keine weiteren Parameter berücksichtigen [19].

Nachfolgend soll ein Modell vorgestellt werden, welches die Beschreibung des Fillets mit zwei Parametern ermöglicht und ebenfalls den klassischen Radius abbilden kann. Das Modell ist so konzipiert, dass es auf den Parametermatrizen  $\mathbf{P}$  und  $\bar{\mathbf{P}}$  aufsetzt und somit keine erneute Analyse der unstrukturierten Punktwolke erforderlich ist. Hierzu werden die Verläufe der Parameter der Dickenverteilung im Spannweiten-Plot hinsichtlich ihrer Charakteristik analysiert. In Bild 7 ist beispielhaft der Parameter der Profildicke dargestellt, der beim Übergang vom Schaufelblatt zur Plattform einen progressiven Anstieg von Null zu  $\infty$  zeigt. Eine elliptische Funktion erfüllt diese Charakteristik gut, weswegen das Filletmodell über den Ansatz einer Ellipse [20]

$$d = d_0 \pm b \sqrt{\left(1 - \frac{(s - s_0)^2}{a^2}\right)} \quad (23)$$

abgeleitet wird. Unter Verwendung der Übergangsbedingungen  $d_0 = b$  und  $s_0 = a$  verbleiben die beiden Halbachsen, welche durch die Dicke  $d_f$  und die Höhe  $s_f$  abgebildet werden.

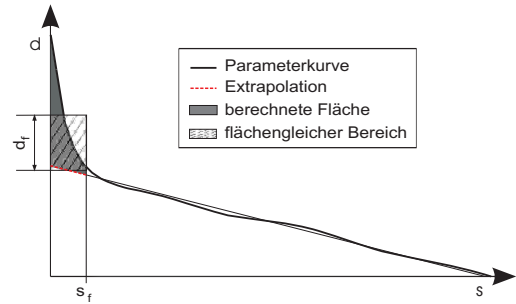


Bild 8. Skizze zum Filletmodell.

Die Höhe wird als Spannweitenkoordinate des charakteristischen Übergangs vom Fillet zum Schaufelblatt erfasst. Die Dicke folgt aus der Bedingung, dass die Fläche unter der Parameterkurve abzüglich der Fläche der extrapolierten Parameterkurve ohne Fillet gleich der gemittelten Fläche ist, womit

$$d_f = \frac{1}{s_f} \left[ \int_0^{s_f} d(s) ds - \int_0^{s_f} d_{extrapol}(s) ds \right] \quad (24)$$

gilt, siehe Bild 8. Bei der Überführung in die Ellipsenbeschreibung sind die Halbachsen

$$a = s_f \quad \text{und} \quad b = \frac{d_f}{1 - \frac{\pi}{4}} \quad (25)$$

bekannt, womit die Ellipsengleichung vollständig durch die Filletparameter beschrieben ist. Nach Gl. 23 erfolgt somit die Variation der Parameter der Dickenverteilung, siehe Bild 9. Die Änderung, die der Schaufelgeometrie hiermit aufgeprägt wird, kann als Vergrößerung des Volumens durch Aufdickung verstanden werden, die in azimuthaler Richtung umlaufend erfolgt. Bei dem entwickelten Modell

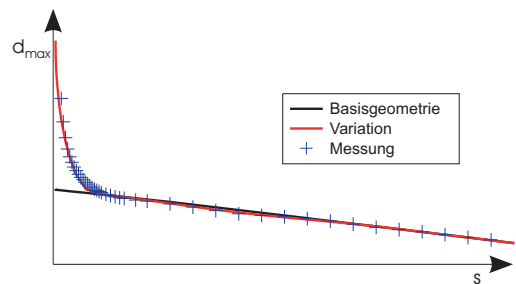


Bild 9. Elliptischer Fillet der Variation im Vergleich zur Basisgeometrie und Messung im Spannweiten-Plot der maximalen Dicke.



mit zwei Parametern ist in Umfangsrichtung eine konstante Änderung der Dicke vorausgesetzt, was durch Mittelung von Gl. 24 für alle Parameter der Dickenverteilung erreicht wird.

### 3 MORPHING DER SCHAUFELOBERFLÄCHE

Die Abbildung der gemessenen geometrischen Abweichungen in der numerischen Simulation erfolgt mit einem entwickelten Morphing-Algorithmus. Er nutzt die gleichen Profilparameter (Gl. 20) wie das beschriebene Modell zur Profilerlegung und ebenfalls das Prinzip der Mittelung der Parameter über Bereiche in Spannweitenrichtung (Gl. 22). Die prinzipielle Idee ist dabei, die Unterschiede der gemittelten Parameter zwischen der gemessenen und der Basisgeometrie in Delta-Größen zu quantifizieren. Durch Morphing wird eine Variation der Basisgeometrie erzeugt, die hinsichtlich der gemittelten Parameter der Messung entspricht und die gemessene Schaufeloberfläche bestmöglich abbildet. Wird als Basis des Morphing-Prozesses bereits eine diskrete numerische Beschreibung genutzt, kann die Simulation direkt mit der Variation erfolgen. Zur Erläuterung der Methode sollen folgende Bezeichnungen vereinbart werden:

**Basis (base):** zu morphende diskrete Geometrie (z.B. originales CFD-Netz)

**Ziel (tar):** Geometrie, die abgebildet werden soll (z.B. gemessene Schaufel)

**Referenz (ref):** Referenz zur Bestimmung der Differenzen (z.B. CAD-Geometrie)

**Variation (var):** Ergebnis des Morphingvorganges (z.B. Realisierung im Sinne der MCS, Abbildung der Messung in der Topologie der Basis)

Das Modell ist so konzipiert, dass die Unterschiede zwischen Ziel- und Referenzgeometrie durch die gemittelten Parameter abgebildet

$$\bar{\mathbf{P}}^\Delta = \bar{\mathbf{P}}^{\text{tar}} - \bar{\mathbf{P}}^{\text{ref}} \quad (26)$$

und zur Basisgeometrie addiert werden

$$\bar{\mathbf{P}}^{\text{var}} = \bar{\mathbf{P}}^{\text{base}} + \bar{\mathbf{P}}^\Delta, \quad (27)$$

um die Geometrie der Variation zu berechnen. Die Unterscheidung zwischen Basis und Referenz ermöglicht z.B. die Abbildung der, gegenüber der kalten CAD-Geometrie berechneten, geometrischen Änderungen auf das (heiße) CFD-Netz. Ist eine Unterscheidung nicht gewünscht, kann die Basis zugleich als Referenz genutzt werden.

#### 3.1 Bereitstellung der Parameter

Wie in Gl. 26 beschrieben sind zuerst die Zielparame- ter  $\bar{\mathbf{P}}^{\text{tar}}$  zu bestimmen. Sie können direkt aus der oben beschriebenen Methode zur Parameterbestimmung entnommen oder über probabilistische Methoden erzeugt werden.

Analog erfolgt die Analyse der Referenzgeometrie, um die Parameter  $\bar{\mathbf{P}}^{\text{ref}}$  zu bestimmen. Hierzu bietet sich die Diskretisierung der CAD-Geometrie durch eine Punktwolke an, womit ein, der optischen Messung entsprechender und somit der Parameterbestimmung kompatibler, Datensatz erzeugt wird. Da die Basisgeometrie eine andere Topologie aufweist, erfolgt die Bestimmung von  $\bar{\mathbf{P}}^{\text{base}}$  mit einem Algorithmus, der gegenüber der beschriebenen Parameterbestimmung eine weitere Restriktion hat. Er basiert auf der Annahme, dass jeder Punkt des Profilschnittes der Saugseite einen Partner auf der Druckseite hat, womit die Skelettlinie (analog zu Gl. 9) als Mittellinie der beiden Punkte berechnet werden kann, jedoch ohne dass das Profil zu interpolieren ist. Diese Restriktion ermöglicht eine einfachere Profilerlegung und einen einfacheren Profilwiederaufbau, da immer zur Skelettlinie symmetrische Profile vorliegen.

Es soll an dieser Stelle hervorgehoben werden, dass das Modell darauf zielt, gemessene Schaufeln in der Simulation abzubilden, die der Basisgeometrie ähnlich sind. Es ist nicht in der Lage topologisch unterschiedliche Schaufeln (z.B. zwei Maxima der Dickenverteilung in der Messung und eins bei der Basis) zu überführen. Weiterhin ist die Genauigkeit des Modells höher, wenn nur geringe Änderungen abgebildet werden, woraus die Forderung abgeleitet wird, dass die Änderungen der Parameter klein gegenüber den Parametern selbst sein sollen. Hierfür kann keine Grenze definiert werden, die für alle Parameter gültig ist. Vielmehr ist darauf zu achten, dass die Charakteristik der Änderungen nicht die des eigentlichen Modells dominiert.

Die in Gl. 27 definierten Parameter der Variation sind in Spannweitenrichtung gemittelte Werte. Zur Anpassung der individuellen Profilschnitte ist jedoch eine Formulierung erforderlich, die die Parameter der Form  $P_{pj}^{\text{var}}$  an den, durch die Basisgeometrie vorgegebenen diskreten Stützstellen bereit stellt. Hierzu bietet sich die Approximation der gemittelten Delta-Parameter an, um ihren Verlauf analytisch zu bestimmen, der anschließend an den Stellen  $s_j$  ausgewertet und somit

$$\bar{P}_{pa}^\Delta \Rightarrow P_{pj}^\Delta \quad (28)$$

berechnet wird.

#### 3.2 Die Freiwerte des Morphing-Algorithmus

Eine Besonderheit des Morphing-Algorithmus besteht darin, dass er es ermöglicht, parameterbasiert die Basisgeometrie zu ändern, ohne dass sie analytisch bekannt ist. Vielmehr basiert der Algorithmus darauf, die Charakteristik der Basisgeometrie zu erhalten und lediglich die Stützstellen der Parameter von Dicken- und Wölbungsverteilung sowie des Profilschnittes anzupassen. Welche Möglichkeiten der geometrischen Variation sich damit ergeben, soll mit Bild 10 verdeutlicht werden.

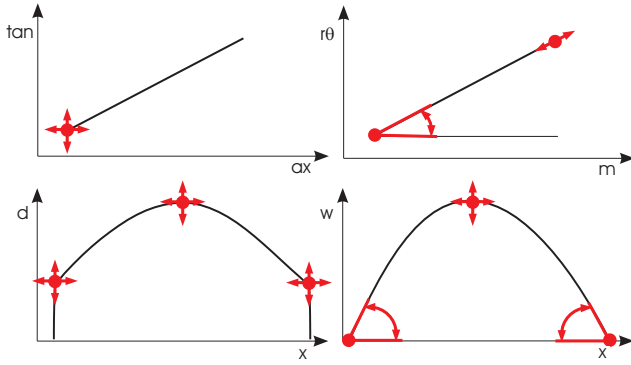


Bild 10. Die Freiwerte des Morphing-Algorithmus.

### 3.3 Variation der Position und Sehnenlinie

Der erste Punkt der Sehnenlinie ist durch die Parameter axiale und tangentielle Position, welche im Schaufelkoordinatensystem den Koordinaten  $z$  und  $y$  entsprechen, bestimmt.

Die Sehnenlinie der Variation wird im Stromlinienkoordinatensystem über die Parameter Sehnenlänge und Staffelungswinkel hinsichtlich Länge und Winkel gegenüber der Basisgeometrie verändert, siehe Bild 11. Hierbei wird der erste Punkt festgehalten und die Verschiebung des letzten Punktes linear auf die dazwischen liegenden verteilt.

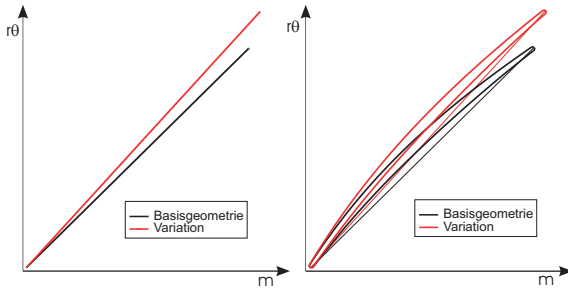


Bild 11. Variation der Sehnenlinie bei Änderung von Staffelungswinkel und Sehnenlänge und resultierendes Profil.

### 3.4 Wichtungsfunktionen

Die Variation der Wölbungs- und Dickenverteilung erfolgt über die Anpassung der charakteristischen Punkte der Verteilungen, siehe Bild 10. Ein qualitativer Unterschied zur Variation der Sehnenlinie besteht in den konkurrierenden Vorgaben der nicht voneinander unabhängigen Parameter. Über Wichtungsfunktionen werden die gegensätzlichen Forderungen miteinander vermittelt und somit allmählich verlaufende Übergänge erzeugt. Sie sind zwischen drei Punkten der Abszisse ( $x_-$ ,  $x_0$  und  $x_+$ ) definiert und werden durch die Forderungen des Verlaufes

$$q(x)|_{x_-} = 0, \quad q(x)|_{x_0} = 1 \quad \text{und} \quad q(x)|_{x_+} = 0 \quad (29)$$

bestimmt. Mit einem kubischen Ansatz  $q_{III}(x)$  können weiterhin die Werte der Ableitung

$$\frac{dq(x)}{dx}|_{x_-} = 0, \quad \frac{dq(x)}{dx}|_{x_0} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{dq(x)}{dx}|_{x_+} = 0 \quad (30)$$

erfüllt werden. Ein Vergleich möglicher Wichtungsfunktionen ist in Bild 12 gezeigt.

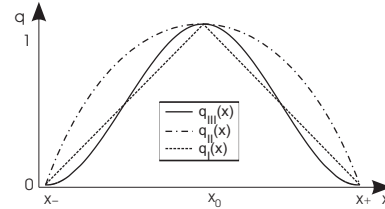


Bild 12. Lineare, quadratische und kubische Wichtungsfunktion.

### 3.5 Variation der Dickenverteilung

Als Parameter der Dickenverteilung werden die Profildicke mit Position auf der Sehne von Vorder- und Hinterkante sowie des Maximums erfasst. Die Verteilung der Dickenänderung folgt aus Überlagerung der Anteile der drei Parameter mit

$$\Delta d(x) = \Delta d_{vk} q_{vk}(x) + \Delta d_{max} q_{max}(x) + \Delta d_{hk} q_{hk}(x) \quad (31)$$

und ist in Bild 13 für drei ausgewählte Wichtungsfunktionen dargestellt.

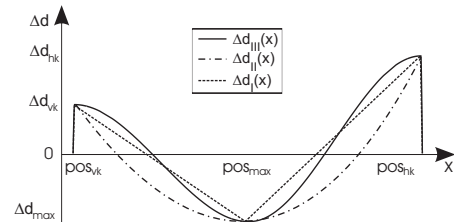


Bild 13. Vergleich der Dickenänderung bei Verwendung von linearer, quadratischer und kubischer Wichtungsfunktionen.

Die Änderung der Position wird als kontinuierliche Verteilung  $\Delta pos_d(x)$  definiert. Sie bewirkt eine Skalierung der Position der Dickenwerte zu größeren bzw. kleineren Sehnenlängen und wird analog durch Überlagerung

$$\Delta pos_d(x) = \Delta pos_{d_{vk}} q_{vk}(x) + \Delta pos_{d_{max}} q_{max}(x) + \Delta pos_{d_{hk}} q_{hk}(x) \quad (32)$$

berechnet. Die Addition von diskreter Profildicke der Basisgeometrie und diskretisierter Dickenänderung

$$d_k^{var} = d_k^{base} + \Delta d_k \quad (33)$$

bestimmt die Dickenverteilung der Variation. Gewünscht ist, dass die Charakteristik der Verteilung, besonders der Verlauf zwischen den Stützstellen, möglichst unverändert bleibt. Diese Forderung ist stets besser erfüllt, wenn die

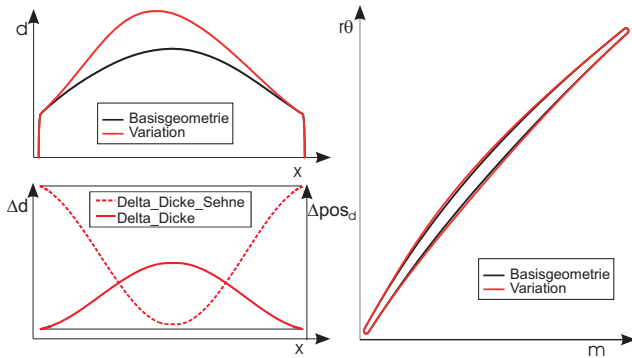


Bild 14. Darstellung der Dickenverteilung und der Profile bei Änderung der maximalen Dicke sowie der Position.

Änderungen klein gegenüber den Absolutwerten sind. Weiterhin ermöglichen die kubischen Wichtungsfunktionen harmonischere Übergänge, siehe Bild 13. Sie sind durch die Forderung gleicher Anstiege an den Bereichsgrenzen  $C_1$ -stetig. In Bild 14 ist beispielhaft dargestellt, wie die Vergrößerung der maximalen Dicke und die Verringerung ihrer Position auf die gesamte Länge des Profils zwischen der Vorderkante und Hinterkante verteilt wird.

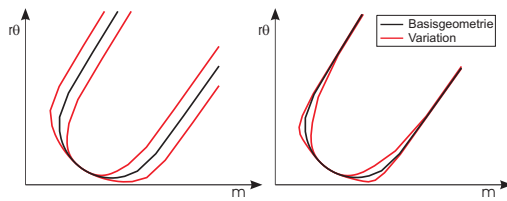


Bild 15. Änderung der Parameter der Vorderkante zur Erzeugung elliptischer Vorderkanten.

Es soll darauf hingewiesen werden, dass die entwickelte Methode jeweils zwei Parameter zur Beschreibung der Vorder- und Hinterkante nutzt, womit auch elliptische Geometrien abgebildet werden können, siehe Bild 15.

### 3.6 Variation der Wölbungsverteilung

Die Variation der Wölbungsverteilung erfolgt analog der Dickenverteilung durch vermittelnde Wichtungsfunktionen. Die Freiwerte der maximalen Wölbung sowie der

Position fließen entsprechend der Dickenverteilung in die Berechnung ein. Ein qualitativer Unterschied besteht hingegen durch die Vorgaben der Winkel an Vorder- und Hinterkante. Sie werden über den Zusammenhang

$$\tan \beta = \frac{w}{x} \quad (34)$$

berücksichtigt, womit die Änderung der Wölbung an der Vorder- bzw. Hinterkante

$$\Delta w(x) = x [\tan(\beta^{var}) - \tan(\beta^{base})] \quad (35)$$

und somit  $\Delta w_{vk}(x)$  und  $\Delta w_{hk}(x)$  bekannt sind. Weiterhin ist durch Überlagerung der einzelnen Anteile die Änderung der Wölbungsverteilung

$$\Delta w(x) = \Delta w_{vk}(x) q_{vk}(x) + \Delta w_{max} q_{max}(x) + \Delta w_{hk}(x) q_{hk}(x) \quad (36)$$

bestimmt. Die Änderung der Position ist bei der Variation der Wölbung auf die Position der maximalen Wölbung beschränkt, womit

$$\Delta pos_w(x) = \Delta pos_{w_{max}} q_{max}(x) \quad (37)$$

gilt. Die variierte Wölbungsverteilung bestimmt sich analog zur Dickenverteilung mit

$$w_k^{var} = w_k^{base} + \Delta w_k. \quad (38)$$

In Bild 16 ist beispielhaft der Einfluss der Änderung der maximalen Wölbung sowie seiner Position auf die Wölbungsänderung und das Profil der Variation gezeigt.

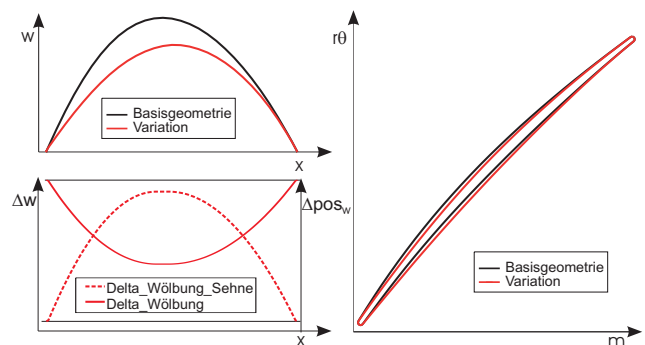


Bild 16. Darstellung der Wölbungsverteilung und der Profile bei Änderung der maximalen Wölbung sowie der Position.

### 3.7 Profilwiederaufbau

Der Wiederaufbau des Profils erfolgt in umgekehrter Reihenfolge zur Zerlegung. Zuerst ist die Sehnenlinie zu berechnen. Durch Superposition der Wölbungsverteilung mit der Sehnenlinie ist die Skelettlinie bestimmt. Die Profillinie berechnet sich durch Überlagerung der Dickenverteilung auf die Skelettlinie, womit das entwickelte Profil symmetrisch zur Skelettlinie ist.

Der Wiederaufbau des Profils erfolgt im Stromlinienkoordinatensystem. Die dreidimensionale Geometrie der Schaufel wird über Transformation der Koordinaten  $[m_k, r\theta_k]$  in das Schaufelkoordinatensystem berechnet. Hierzu ist das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} r_k &= r_j(z_k) \\ m_k &= m_{k-1} + \sqrt{(r_k - r_{k-1})^2 + (z_k - z_{k-1})^2} \end{aligned} \quad (39)$$

nach  $r_k$  und  $z_k$  zu lösen. Diese Herangehensweise ist von Grassel et al. verwendet worden [8].

In dem entwickelten Modell wurde eine alternative numerische Lösung abgeleitet, die sehr schnell das Ergebnis ermittelt, da die Gleichungen entkoppelt gelöst werden. Hierzu wird der Zusammenhang zwischen der meridionalen und der axialen Koordinate so gelöst, dass für einen Profilschnitt  $j = \text{const}$  direkt aus dem  $m_k$  das unbekannte  $z_k$  und nachfolgend  $r_k$  berechnet wird. Die Methode beruht auf der Interpolation geeigneter Punkte des Profilschnittes, die in beiden Koordinatensystemen bekannt sind. Die weiteren Koordinaten des Schaufelkoordinatensystems  $\theta_k, x_k$  und  $y_k$  können über trigonometrische Beziehungen einfach abgeleitet werden.

## 4 ANWENDUNG DES MODELLS

Die Anwendung des Modells soll nachfolgend anhand einer vermessenen Testschaufel gezeigt werden. Aus der Punktwolke wurden zuerst die Profilschnitte extrahiert, siehe Bild 17.

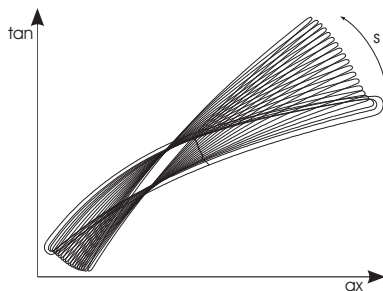


Bild 17. Profilschnitte der vermessenen Testschaufel.

Mit dem Algorithmus der Messauswertung erfolgte die Parametrisierung, die die Basis für den Profilwiederaufbau mit dem Morphing-Algorithmus darstellt. In den nachfolgenden Grafiken ist die gemessene Geometrie, die Sollgeometrie sowie die variierte Geometrie gemeinsam dargestellt.

Damit soll zum Einen die Möglichkeit der Auswertemethode hinsichtlich der detaillierten Analyse und zum anderen die Leistungsfähigkeit des Morphing-Algorithmus gezeigt werden.

Die dreidimensionale Bewertung der Parameter ist im Spannweiten-Plot möglich, siehe Bild 18. Hier wurden zwei

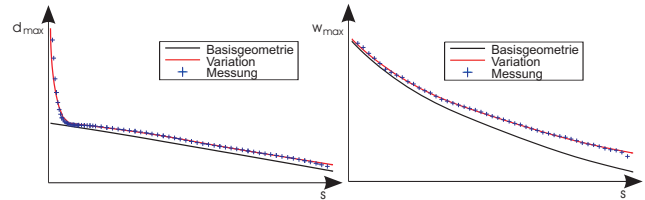


Bild 18. Darstellung der Parameter maximale Dicke und maximale Wölbung im Spannweiten-Plot.

Parameter gewählt, deren Abweichungen vergleichsweise groß waren, womit gleichzeitig die Anforderungen an den Morphing-Algorithmus höher sind. Der Spannweiten-Plot ist geeignet die Schaufel grob zu klassifizieren und problematische Profilschnitte als Ausreißer zu identifizieren. Um ein Gefühl für diese Darstellungsform zu bekommen, ist die Analyse der Parameter eines Profilschnittes gleicher Spannweitenkoordinate angebracht. Hierzu sind die Verteilungen von Wölbung und Profildicke in Bild 19 dargestellt. Anhand

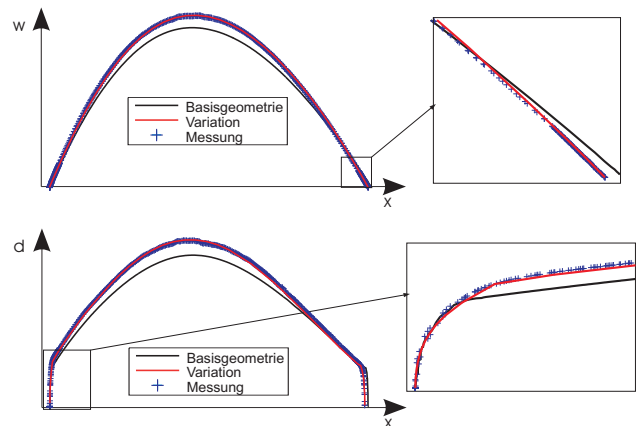


Bild 19. Darstellung der Wölbungs- und Dickenverteilung.

des Rauschens der Punkte der Messung kann auf die Messqualität geschlossen werden. Weiterhin sollte überprüft werden, wie gut die Variation die Messung im Mittel abbildet. Außerdem sollten die Profillinien der Variation mit dem der gemessenen Schaufel verglichen werden, siehe Bild 20. Hierbei ist gut zu erkennen, wie die Variation die Messung insgesamt sowie an besonders interessanten Bereichen (z.B. an der Vorderkante) abbildet.

Die Variation zur Abbildung der Testschaufel erfolgte unter Verwendung von vier Bereichen in Spannweitenrichtung. Mit den zwei Parameter für den Fillet, wurden

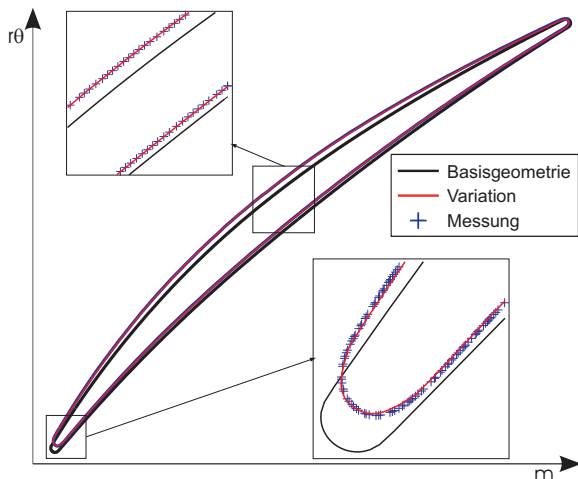


Bild 20. Darstellung des Profilschnittes.

insgesamt 58 Parameter für das Morphing verwendet. Eine Verringerung der Bereiche geht mit einer Verringerung der insgesamt verwendeten Parameter einher. Bei zwei Bereichen sind noch 30 und bei einem Bereich sind 16 Parameter erforderlich. In Bild 21 ist der beispielhaft resultieren-

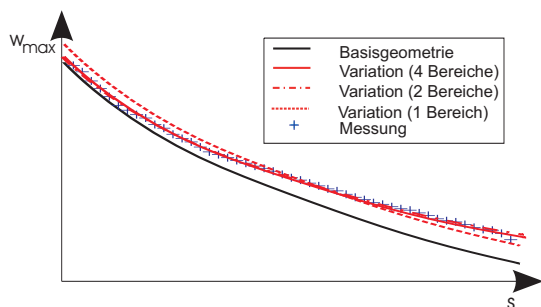


Bild 21. Parameter der Variation im Spannweiten-Plot für verschiedene Anzahl an Bereichen.

de Verlauf der maximalen Wölbung der Variation für eine verschiedene Anzahl an Bereichen abgebildet. Es ist zu erkennen, dass mit einem Bereich eine vermittelte Abbildung der Änderung des Parameters erfolgt. Hingegen ermöglicht die Verwendung von vier Bereichen nur eine sehr geringe Verbesserung gegenüber zwei Bereichen. Die Erfahrung besagt, dass die Änderungen der Parameter in der Regel homogen verlaufen, womit die wesentlichen Effekte mit einem Bereich und somit nur 16 Parametern abgebildet werden können.

## 5 ZUSAMMENFASSUNG

Mit dem entwickelten Modell ist die parameterbasierte Analyse von dreidimensional optisch vermessenen Verdichterschaufeln möglich. Hierzu werden aus der unstrukturierten Punktwolke Profilschnitte extrahiert, auf denen die Bestimmung klassischer Profilparameter erfolgt. Zur Abbil-

dung der Geometrie der gescannten Schaufeln in der numerischen Simulation ist eine spezielle Morphing-Anwendung entwickelt worden. Sie passt die Knoten des numerischen Netzes an definierten Stützstellen so an, dass das variierte Netz die Profilparameter der vermessenen Schaufel erfüllt.

Das Modell ist flexibel hinsichtlich der Lage und der Anzahl der Profilschnitte. Da nur die Änderung der Profilparameter erfasst wird, genügen vergleichsweise wenige Parameter zur Beschreibung der geometrischen Abweichungen. Eine Voraussetzung dieser Annahme ist, dass die Änderung der gemessenen Schaufeln klein gegenüber den geometrischen Dimensionen ist. Weiterhin erlaubt das Modell eine Reduktion der Stützstellen über der Schaufelhöhe durch die Zusammenfassung der Profilschnitte in radial vermittelnde Bereiche. Da die geometrischen Abweichungen in der Regel homogen sind, genügt häufig ein Bereich im Schaufelblatt, um die wesentlichen Änderungen zu erfassen. Hierzu sind mit dem entwickelten Modell lediglich 16 Parameter erforderlich.

## Danksagung

Dieses Projekt wurde durch die deutsche Bundesregierung innerhalb des Luftfahrtforschungsprogramms LuFo IV gefördert. Weiterer Dank geht an den Projektpartner Rolls-Royce Deutschland Ltd & Co KG für die Unterstützung bei der Bearbeitung des Projektes sowie für die Erlaubnis zur Veröffentlichung.

## Literatur

- [1] Bremer, C. "Adaptive strategies for manufacturing and repair of blades and blisks". *ASME paper no. 2000-GT-0340*.
- [2] Bremer, C. "Automated repair and overhaul of aero-engine and industrial gas turbine components". *ASME paper no. GT2005-68193*.
- [3] Duó, P., Pianka, C., Golowin, A., Fueller, M., Schaefer, R., and Bernhardt, U. "Simulated foreign object damage aerofoils. Real damage investigation". *ASME paper no. GT2008-50371*.
- [4] Heinze, K., Friedl, W.-H., Vogeler, K., and Voigt, M. "Probabilistische HCF-Untersuchung von Verdichterschaufeln". *Probabilistik-Workshop, TU Dresden, 2008*.
- [5] Holzhausen, S., Schreiber, S., and Stelzer, R. "Automated 3D measuring of compressor blades and analysis of measurement". *ASME paper no. GT2009-59902, to be published*.
- [6] Ristic, M. "Measurement-based updating of a turbine blade CAD models: a case study". *International Journal of Computer Integrated Manufacturing*.
- [7] NUMECA - User Manual AutoBlade v3 (2007).
- [8] Gräsel, J., Keskin, A., Swoboda, M., Przewozny, H., and Saxer, A. "A full parametric model for turbomachinery blade design and optimisation". *ASME paper no. DETC2004-57467*.
- [9] Jolliffe, I., 2002. *Principal Component Analysis*. Springer; 2nd edition.



- [10] Garzon, V. E., and Darmofal, D. L. "Impact of geometric variability on axial compressor performance". *ASME paper no. GT2003-38130*.
- [11] Brown, J. M., Slater, J., and Grandhi, R. V. "Probabilistic analysis of geometric uncertainty effects on blade modal response". *ASME paper no. GT2003-38557*.
- [12] Sinha, A., Hall, B., Cassenti, B., and Hilbert, G. "Vibratory Parameters of Blades from Coordinate Measurement Machine (CMM) Data". *ASME paper no. GT2005-69004*.
- [13] Beachkofski, B. K., and Grandhi, R. V. "Probabilistic system reliability for a turbine engine airfoil". *ASME paper no. GT2004-53381*.
- [14] Lamb, C. T., and Darmofal, D. L. "Performance-based geometric tolerancing of compressor blades". *ASME paper no. GT2004-53592*.
- [15] Lamb, C. M., 2005. Probabilistic performance-based geometric tolerancing of compressor blades. Master's thesis, Massachusetts Institute of Technology.
- [16] Schroeder, G. "Erstellung eines Programms zur Approximation und Analyse von bestehenden Schaufelprofilen". *studentische Belegarbeit am Institut für Strömungsmeschanik, TU Dresden, 2005*.
- [17] Traupel, W., 1988. *Thermische Turbomaschinen, Band 1*. Springer Verlag.
- [18] Vinnemeier, F. M., 1991. *Analyse der Strömung in einem mehrstufigen Axialverdichter*. PhD thesis, Technische Hochschule Aachen.
- [19] *NUMECA - User Manual AutoGrid v8 (2007)*.
- [20] Merzinger, G., Mühlbach, G., Wille, D., and Wirth, T., 1999. *Formeln + Hilfen zur höheren Mathematik*. Bionomi.